

**Вопросы и задачи¹ к экзамену
по аналитической геометрии и линейной алгебре**

Зимняя экзаменационная сессия 2006/2007 уч. года.

АВТ, группы А-11, А-12.

Комплексные числа.

1. Записать комплексное число $\frac{6-2i}{2+i}$ в алгебраической форме.
2. Записать комплексное число $-3 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

Векторная алгебра. Теоретические вопросы.

3. Дать определение произведения вектора на число.
4. Дать определение коллинеарных векторов, сформулировать свойства коллинеарности.
5. Дать определение компланарных векторов, сформулировать свойства компланарности.
6. Дать определение скалярного произведения векторов и сформулировать его свойства.
7. Вывести формулу для выражения скалярного произведения через декартовы координаты.
8. Вывести формулу, выражающую угол между векторами через их декартовы координаты.
9. Дать определение векторного произведения и сформулировать его свойства.
10. Написать формулы для выражения координат векторного произведения через декартовы координаты перемножаемых векторов.
11. Дать определение смешанного произведения векторов и сформулировать его свойства.
12. Вывести формулу, выражающую смешанное произведение векторов через их декартовы координаты.
13. Сформулировать и доказать утверждение о геометрическом смысле смешанного произведения векторов.
14. Вывести условие компланарности трех векторов.

Векторная алгебра. Задачи.

15. Даны три вершины $A(6; -4; 1)$, $B(-2; 5; 3)$ и $C(6; -3; 8)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты четвертой вершины.
16. При каких m и n векторы $\vec{a} = (1, m, -2)$ и $\vec{b} = (n, 0, 5)$ параллельны?
17. Найти косинус угла между векторами $\vec{a} = (4, -4, 2)$ и $\vec{b} = (6, 2, -3)$.
18. При каком m векторы $\vec{a} = (1, 4m, -m)$ и $\vec{b} = (2, -3, 1)$ перпендикулярны?
19. Даны векторы $\vec{a} = (-4, 2, 4)$ и $\vec{b} = (2, 2, 1)$. Найти $\text{pr}_{\vec{b}}(3\vec{a} + 2\vec{b})$.
20. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (3, -1, 0)$ и такой, что $(\vec{x}; \vec{a}) = -30$.
21. Найти векторное произведение $[\vec{a}; \vec{b}]$, где $\vec{a} = 5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$.
22. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (5, -4, 3)$ и $\vec{b} = (2, -2, 1)$.
23. Найти площадь треугольника ABC , если $A(2, 3, 6)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 3, -3)$.
24. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (2, -3, 0)$, $\vec{b} = (4, 0, -1)$ и $\vec{c} = (0, 1, -2)$ и выяснить, правой или левой является тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
25. При каком x векторы $\vec{a} = (x, 3, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$, $\vec{c} = (1, 9, -11)$ компланарны?
26. При каком y точки $A(1, -1, 2)$, $B(0, 5, 1)$, $C(-1, 1, 2)$ и $D(3, y, 1)$ лежат в одной плоскости?

Прямые и плоскости. Теоретические вопросы.

27. Вывести уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпенди-

¹Приведены задачи, аналогичные задачам из экзаменационных билетов, т.е. числовые данные изменены.

кулярно вектору $\vec{n} = (A, B)$.

28. Вывести условие параллельности (перпендикулярности) прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (на плоскости).

29. Вывести формулу для угла между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (на плоскости).

30. Вывести уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

31. Вывести формулу для расстояния от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

32. Вывести уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

33. Вывести условие параллельности плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

34. Вывести канонические (параметрические) уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, с направляющим вектором $\vec{a} = (p, q, r)$.

35. Вывести уравнения прямой в пространстве, проходящей через две данные точки.

36. Вывести условия, при которых прямые $\frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$ и $\frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}$ параллельны (пересекаются, скрещиваются).

37. Вывести условие параллельности прямой $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

38. Вывести формулу для угла между прямой и плоскостью в пространстве.

39. Вывести условие перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве.

Прямые и плоскости. Задачи.

40. Написать уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M(14, -12)$ перпендикулярно прямой $22x - 33y + 1 = 0$.

41. Вершины треугольника находятся в точках $A(-30, 12)$, $B(27, 41)$, $C(52, -34)$. Написать уравнение высоты CH .

42. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $P(-121, -38)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-5}$.

43. Написать уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(5, -9)$ параллельно прямой $7x - 11y + 15 = 0$.

44. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(13, -11)$, $M_2(2, -10)$.

45. На плоскости даны точки $A(8, 3)$, $B(-7, 0)$ и $C(-2, 9)$. Написать уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB .

46. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $C(5, -1)$ параллельно прямой $x = -53 - 21t$, $y = 34 + 13t$.

47. Найти расстояние от точки $M(5, 2)$ до прямой $4x - 3y + 4 = 0$.

48. Написать уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $x + 7y - 2 = 0$ и $x - y + 7 = 0$.

49. На плоскости на оси Oy найти точки, отстоящие от прямой $5x - 12y + 26 = 0$ на расстоянии 13.

50. Убедившись, что прямые $3x - 5y - 1 = 0$ и $-6x + 10y - 12 = 0$, параллельны, найти расстояние между ними.

51. На плоскости составить уравнения прямых, параллельных прямой $4x + 7y + 2 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии 2.

52. Написать уравнение прямой, равноудаленной от параллельных прямых $-x + 3y = 0$ и $2x - 6y - 23 = 0$.

53. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4, -7, 0)$ перпендикулярно прямой $x = 1 + 12t$, $y = 3 - 5t$, $z = -t$.

54. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3, -7, 0)$ параллельно плоскости $3x - 4y + 5z - 1 = 0$.
55. Найти угол между плоскостями $4x + 3z - 1 = 0$ и $3x - 2y + 2 = 0$.
56. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(3; 0; -1)$, $M_2(4; 2; -3)$ и $M_3(5; -7; 0)$.
57. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, 0, -7)$ параллельно векторам $\vec{a} = (3, -1, 0)$ и $\vec{b} = (2, 0, -5)$.
58. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, 0, -2)$ параллельно прямым $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{6}$ и $x = -t, y = 9 + 11t, z = 5$.
59. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 1, 0)$ и через прямую $x = 1 - 2t, y = 3t, z = -3$.
60. Найти расстояние от точки $M(3, 4, -1)$ до плоскости $3x - 6y - 2z - 11 = 0$.
61. На оси OZ найти точки, отстоящие от плоскости $3x - y + z + 1 = 0$ на расстоянии 2.
62. Убедившись, что плоскости $x - 2y - 2z + 11 = 0$ и $2x - 4y - 4z - 7 = 0$ параллельны, найти расстояние между ними.
63. Написать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x - 6y + 3z - 5 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии 3.
64. Составить уравнение плоскости, равноудаленной от параллельных плоскостей $2x - 2y + z - 5 = 0$ и $-4x + 4y - 2z - 13 = 0$.
65. Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями $2x + y - 2z - 3 = 0$ и $2x - 4y + 4z - 9 = 0$.
66. Составить канонические (параметрические) уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку $A(0, 1, -4)$ параллельно прямой $x = 13t, y = 100 - 11t, z = 23 + 2t$.
67. Написать канонические (параметрические) уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(24, -2, 35)$ и $M_2(23, -7, 30)$.
68. Составить параметрические (канонические) уравнения прямой, проходящей через точку $M(0, -7, 9)$ перпендикулярно плоскости $8x - 15z + 5 = 0$.
69. При каком p прямые $\frac{x-3}{p} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-1}{4}$ и $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{-3}$ пересекаются?
70. Найти кратчайшее расстояние между прямыми $\frac{x+4}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ и $\frac{x+5}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-5}{-5}$.
71. Найти угол между прямыми $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ и $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.
72. Найти точку пересечения прямой $x = 1 - t, y = t, z = 2$ и плоскости $3x - 2y + 4z - 1 = 0$.
73. Написать канонические (параметрические) уравнения прямой $\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x + y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$.
74. Найти расстояние от точки $P(2, 3, -1)$ до прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-13}{4}$.
75. Найти проекцию точки $M(4, -5, 13)$ на плоскость $2x - 3y + 6z - 3 = 0$.
76. Найти проекцию точки $M(8, -2, 3)$ на прямую $x = 1 + 3t, y = -4 - t, z = t$.

Кривые второго порядка.

77. Привести к каноническому виду уравнение $4x^2 + 9y^2 + 18y - 27 = 0$ (или $4x^2 - 9y^2 - 8x - 32 = 0$ или $y^2 - 6x - 2y + 13 = 0$) и построить кривую.

Поверхности в пространстве.

78. Построить сечение поверхности $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$ (или $x^2 + y^2 = 8z$ или $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = 1$ или $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = -1$ или $x^2 = 12z$ или $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$) плоскостью Oxz . Назвать и изобразить полученную поверхность.