

Список задач к экзамену по линейной алгебре

1 семестр 2003/2004 уч. г., факультет АВТ. Группы С-14, С-15, СК-11.

Лектор: Б. В. Карпов.

Ниже приводятся задачи (с ответами), аналогичные задачам, содержащимся в экзаменационных билетах. Версия от 15 января 2004, два ответа исправлены.

1. Найти расстояние между прямыми

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{12} \quad \text{и} \quad \frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0}.$$

2. На оси OZ найти точку, равноудаленную от плоскостей $4x - 3y + z - 1 = 0$ и $y + 5z - 3 = 0$.

3. Выяснить взаимное расположение прямых

$$\begin{cases} -2x + 5y - 3z + 7 = 0 \\ 2x - 3y - z - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}.$$

4. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-3}{2}$$

и плоскости $2x + y + 3z - 4 = 0$.

5. На оси OX найти точки, отстоящие от плоскости

$2x - 2y + z - 4 = 0$ на расстоянии 2.

6. Найти модуль и аргумент числа $z = -2 + 2i$, записать z в тригонометрической форме и найти z^{-7} .

7. Записать комплексное число

$$\frac{(2+4i)^2}{3+i} + (2-5i)$$

в алгебраической форме, изобразить его на комплексной плоскости и найти его модуль и аргумент.

8. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; -1; 0)$, $B(2; 3; 6)$, $C(-1; 0; 6)$.

9. При каком значении m плоскости

$$4x - 2y - 6z + 1 = 0 \quad \text{и} \quad -2x + y + mz - 5 = 0$$

а) перпендикулярны; б) параллельны? .

10. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad D = (4 \ 1 \ -2).$$

Найти: а) $B - C$; б) $A(B - C)$; в) $A(B - C)D$.

11. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) $B + 2C$; б) $(B + 2C)D$; в) $A(B + 2C)D$.

12. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 3 \end{cases}$$

методом Гаусса. Записать общее решение как выражение главных неизвестных через свободные и в векторной форме.

13. Найти обратную матрицу к матрице

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

методом Гаусса. Сделать проверку умножением.

Ответы.

1. 3. **2.** $(0; 0; 1/2)$, $(0; 0; 2/3)$. **3.** Прямые совпадают. **4.** $(2; -3; 1)$. **5.** $(5; 0; 0)$ и $(-1; 0; 0)$. **6.** $z = 2\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$, $z^{-7} = -\frac{1}{2048} + \frac{1}{2048}i$. **7.** i , $|i| = 1$, $\arg i = \pi/2$. **8.** 13,5. **9.** а) $-5/3$; б) 3.

10. а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 16 \\ 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 64 & 16 & -32 \\ 20 & 5 & -10 \end{pmatrix}$.

11. а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 11 & -1 \\ -8 & 14 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} -4 \\ 35 \\ -52 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} -139 \end{pmatrix}$.

12. Выражение главных неизвестных через свободные: $\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_4 \end{cases}$.

Векторная форма: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.