

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ РОССИИ**
Московский государственный институт
электроники и математики
(Технический университет)

**А. Г. ФЕДОТОВ
Б. В. КАРПОВ**

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Утверждено Редакционно-издательским советом
института в качестве Учебного пособия

Москва 2005

УДК 514.12
ББК 22.151.5
Ф 32

Рецензенты: докт. физ.-матем. наук Д. О. Орлов (Математический институт Российской Академии Наук им. В. А. Стеклова);
канд. физ.-матем. наук А. Л. Городенцев (Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова)

Федотов А. Г., Карпов Б. В.

Ф 32 Аналитическая геометрия. Учебное пособие — Московский государственный институт электроники и математики. М., 2005. — 158 с.

ISBN 5-94506-116-6

Изложен теоретический курс аналитической геометрии. Рассмотрены декартовы и полярные координаты на плоскости, декартовы координаты в пространстве, комплексные числа и действия над ними в алгебраической и тригонометрической форме. Изложена векторная алгебра, включая векторное и смешанное произведения. Выведены различные виды уравнений прямой на плоскости, плоскости и прямой в пространстве, разобраны решения наиболее важных задач. Выведены канонические уравнения кривых второго порядка, описано приведение кривой к каноническому виду, получена классификация кривых второго порядка. Выведены уравнения цилиндрических и конических поверхностей в пространстве, а также поверхностей вращения. Изложен метод параллельных сечений и приведена классификация поверхностей второго порядка. Материал сопровождается большим количеством рисунков, поясняющих текст.

Для студентов, обучающихся по инженерным специальностям.

УДК 514.12
ББК 22.151.5

ISBN 5-94506-116-6 © Федотов А. Г., Карпов Б. В., 2005

ПРЕДИСЛОВИЕ

Рождение в XVII веке аналитической геометрии как математической дисциплины связано с именами Р. Декарта и П. Ферма, которые систематически использовали метод координат для решения геометрических задач и далеко продвинулись на этом пути.

Как дисциплина учебная, аналитическая геометрия сформировалась на рубеже XVIII–XIX веков в результате педагогической деятельности Г. Монжа и его учеников. Тогда же возникло современное название предмета, и были написаны учебники, структура и содержание которых во многом сохранились до наших дней.

Во второй половине XIX века развилось векторное исчисление, которое постепенно заняло прочные позиции в математике, механике и теоретической физике, что, естественно, отразилось на преподавании этих наук. В частности, изложение аналитической геометрии «векторным методом» стало традиционным к середине прошлого столетия.

В дореволюционной России и Советском Союзе было написано много прекрасных учебников по аналитической геометрии. Различные по полноте содержания, сжатости текста, уровню строгости и формализованности изложения, они могли удовлетворить интересы любого, обучающегося этому предмету. К сожалению, большинство из них еще ждут переиздания.

Настоящее учебное пособие написано с надеждой частично восполнить этот пробел хотя бы в рамках потребностей одного института. Оно предназначено для студентов инженерных специальностей, а изложение соответствует лекционному плану, составленному Р. С. Исмагиловым и Л. В. Сбитневой на кафедре алгебры и анализа МИЭМ.

Основой данного пособия является **традиционный курс элементарной геометрии**. Мы старались максимально использовать достоинства такого подхода (его наглядность) и скрасить недостатки (невнимание к частным случаям). При этом мы избегали излишней абстрактности и формализма в изложении; это касается, например, понятий вектора и равенства векторов. Еще в большей степени это относится к таким сложным понятиям, как кривая и поверхность, которые в тексте вовсе не определяются. Мы полагали, что интуитивные понятия о кривой как «следе движущейся точки» и о поверхности как «бесконечно тонкой пленке», расположенной в пространстве, вполне достаточны для данного курса.

Цель курса аналитической геометрии состоит в том, чтобы научить студентов решать геометрические задачи аналитическими мето-

дами, а также применять геометрическую интуицию при решении алгебраических задач. Изучение высшей математики традиционно начинается с аналитической геометрии, поскольку она представляет собой основу последующих математических курсов, а также приложений математики в естественных и технических науках.

В заключение необходимо отметить, что курс аналитической геометрии для инженеров с теми или иными вариациями читают большинство сотрудников кафедры алгебры и математической логики МИЭМ. Их богатый педагогический опыт не мог не отразиться в нашем преподавании и, в частности, в этом учебном пособии. Выражаем им за это глубокую и искреннюю благодарность. Это относится особо к В. Л. Попову, Т. М. Баранович и К. К. Андрееву, которые внимательно прочитали пособие в рукописи и сделали много полезных замечаний.

Авторы.

ГЛАВА 1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

1.1. Числовая ось

Рассмотрим прямую l и выберем на ней точку O , называемую далее **началом координат**. Точка O разбивает прямую l на две **полуоси** (на два луча), одну из которых назовем **положительной полуосью**, а другую — **отрицательной**. На чертеже положительную полуось мы будем обозначать стрелкой (см. рис. 1.1).

Осуществив выбор положительной и отрицательной полуосей, мы получаем **направленную прямую**, или **ось**.

Пусть определена единица измерения длины (масштабная единица) и, таким образом, мы можем измерять расстояние между любыми двумя точками прямой l .

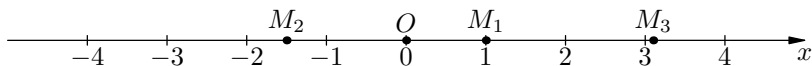


Рис. 1.1.

Пусть M — точка на прямой l . Поставим в соответствие точке M число x по следующему правилу:

- а) если M совпадает с началом координат, то $x = 0$;
- б) если M принадлежит положительной полуоси, то x есть расстояние от точки M до начала координат;
- в) если M принадлежит отрицательной полуоси, то x есть расстояние от точки M до начала координат, взятое со знаком минус.

Число x называется **координатой**¹ (декартовой координатой) точки M на оси l .

После сопоставления каждой точке оси l ее координаты мы получаем **координатную** (или **числовую**) ось Ox .

На рисунке 1.1 изображены три точки M_1 , M_2 , M_3 , координаты которых равны соответственно: $x_1 = 1$, $x_2 = -1,5$, $x_3 = 3,1$.

Существенно, что каждой точке M координатной оси однозначно поставлена в соответствие ее координата x и наоборот, для всякого числа x можно подобрать единственную точку M на координатной оси, координата которой совпадает с числом x .

¹ Термин «**координаты**» (от латинских слов *sum* — «с» и *ordinata* — «упорядоченная») введен немецким математиком и философом Г. В. Лейбницем (1646–1716).

Таким образом, точка на координатной оси однозначно определяется своей координатой и задание точки означает задание ее координаты.

Далее, запись $M(x)$ означает, что точка M имеет координату x , и для точек M_1, M_2, M_3 (см. рис. 1.1) мы запишем: $M_1(1), M_2(-1,5), M_3(3,1)$.

Отметим, наконец, что **расстояние между двумя точками $M'(x')$ и $M''(x'')$ есть абсолютная величина разности их координат**: $M'M'' = |x' - x''|$. Например: $M_1M_3 = |1 - 3,1| = 2,1$.

Для определения положения точки **на плоскости** чаще других используется **декартова система координат** (д.с.к.), к рассмотрению которой мы переходим.

1.2. Декартовы координаты на плоскости

Выберем на интересующей нас плоскости π точку O — **начало системы координат** — и две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O . Каждая из этих прямых разбивается точкой O на две полуоси, и для каждой из этих прямых мы одну полуось объявим **положительной**, а другую **отрицательной**, превращая тем самым прямые в координатные оси.

Как и при рассмотрении точек на прямой, мы считаем масштабную единицу заранее выбранной.

Одну из координатных осей назовем **осью абсцисс** и обозначим Ox , другую — **осью ординат**. Ее обозначим — Oy . Положительные полуоси отметим на чертеже стрелками (рис. 1.2).

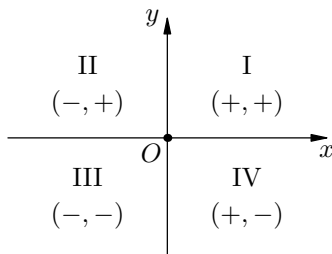


Рис. 1.2.

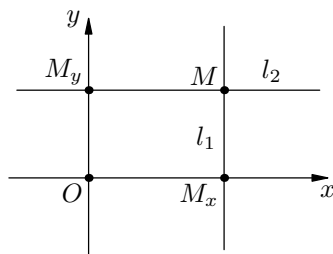


Рис. 1.3.

Осуществив построения **осей д.с.к.**, мы, с их помощью, каждой точке $M \in \pi$ поставим в соответствие пару чисел — **декартовы координаты точки M** , абсциссу x и ординату y , — по следующему правилу.

Через точку M проведем прямую, параллельную оси Oy . Она пересечет ось абсцисс Ox в точке M_x (рис. 1.3). Рассмотрим число x — координату точки M_x на оси абсцисс — и назовем его **первой координатой (абсциссой)** точки M .

Аналогично определим число y — **вторую координату (ординату)** точки M . Пара чисел (x, y) представляет собой **декартовы координаты** точки M относительно выбранных осей координат. Декартовы координаты точки M будем записывать рядом с буквенным обозначением точки в круглых скобках: $M(x, y)$.

Оси координат разбивают плоскость на четыре прямых угла — **квадранта**: I, II, III, IV (см. рис. 1.2). Для точек одного квадранта знаки их соответствующих координат постоянны и имеют значения, указанные на рис. 1.2.

Точки оси Ox обладают нулевыми вторыми координатами, а точки оси Oy — нулевыми первыми. У начала координат абсцисса и ордината равны нулю.

Плоскость, на которой описанным выше способом введены координаты, будем далее называть **Oxy -плоскостью**.

Важнейшим свойством введенной системы координат является следующее: **для произвольной пары чисел x и y существует, причем единственная, точка M на плоскости Oxy , для которой число x является абсциссой, а y — ординатой¹**.

Действительно, пусть x и y — произвольные числа. Отметим на оси Ox единственную точку M_x с координатой x , а на оси Oy — единственную точку M_y с координатой y . Тогда точка M , являющаяся пересечением прямых l_1 , проходящей через точку M_x параллельно оси Oy и l_2 , проходящей через точку M_y параллельно оси Ox , является единственной точкой на плоскости, координаты которой относительно осей Ox и Oy есть числа x и y .

Используя координаты, решим две важные задачи.

¹ Еще древние египтяне понимали, что положение точки на плоскости определено ее расстояниями до двух фиксированных перпендикулярных прямых. Это обстоятельство использовал в своих трудах Архимед Сиракузский (287–212 до Р. Х.) и, позже, Аполлоний Пергский (260–170 до Р. Х.). Но впервые систематически эта идея была развита французским математиком П. Ферма (1601–1665) и Р. Декартом (1596–1650). Правда, в их формулировке расстояния могли быть только неотрицательными числами. Важное замечание, что эти «расстояния» можно считать также и отрицательными, принадлежит английскому математику, механику и физику И. Ньютону (1641–1727). Непреходящая заслуга Декарта и Ферма — в идее использовать алгебру в геометрии, а также в применении развитой алгебраической символики, пришедшей ранее в Европу с арабского Востока.

Нахождение расстояния между двумя точками. Пусть на плоскости Oxy даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Найдём расстояние между ними.

Пусть сначала $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Проведём через точки M_1 и M_2 прямые, параллельные осям координат Oy и Ox соответственно (рис. 1.4). Пусть M — точка пересечения этих прямых. Тогда $MM_1 = |y_1 - y_2|$, а $MM_2 = |x_1 - x_2|$.

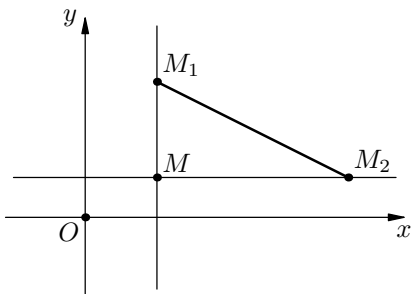


Рис. 1.4.

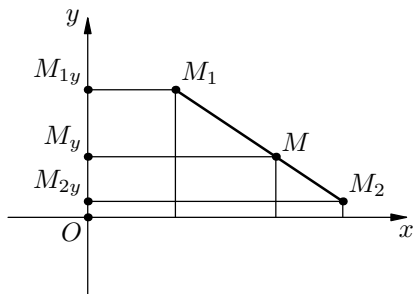


Рис. 1.5.

По теореме Пифагора, примененной к треугольнику M_1MM_2 , получаем, что расстояние M_1M_2 между заданными точками равно

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (1.1)$$

Непосредственно проверяется, что формула (1.1) дает правильный результат и в том случае, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$ или оба равенства выполнены одновременно.

Деление отрезка в данном отношении¹. Пусть на плоскости Oxy даны две различные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Найдём координаты x и y точки M отрезка M_1M_2 , делящей этот отрезок в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$, т. е. такой, что $M_1M : MM_2 = \lambda_1 : \lambda_2$.

Предположим, что отрезок M_1M_2 не параллелен оси Ox (рис. 1.5).

Рассмотрим на оси Oy точки M_{1y} , M_y , и M_{2y} , являющиеся проекциями точек M_1 , M , и M_2 на эту ось. Имеем равенства:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{M_{1y}M_y}{M_yM_{2y}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

¹ Формулы для «деления отрезка в данном отношении» впервые выписал немецкий геометр Ф. Иохимсталь в 1884 г.

Поскольку $M_{1y}M_y = |y_1 - y|$ и $M_yM_{2y} = |y - y_2|$, справедливо соотношение:

$$\frac{|y_1 - y|}{|y - y_2|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Так как точка M лежит между точками M_1 и M_2 , числа $y_1 - y$ и $y - y_2$ одного знака. Следовательно:

$$\frac{|y_1 - y|}{|y - y_2|} = \frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Разрешая последнее равенство относительно y , находим:

$$y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (1.2)$$

В случае, когда отрезок M_1M_2 параллелен оси Ox , формула (1.2) дает правильный результат: $y = y_1 = y_2$.

Абсцисса точки M находится аналогично, и мы получаем ответ:

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (1.3)$$

1.3. Уравнение кривой на плоскости в неявной форме

Пусть на плоскости Oxy задана некоторая кривая. **Уравнение** $F(x, y) = 0$ называется **уравнением этой кривой** (точнее **уравнением кривой в неявной форме**), если этому уравнению удовлетворяют координаты (a, b) любой точки этой кривой и, наоборот, любая пара чисел a, b , удовлетворяющая уравнению $F(x, y) = 0$, представляет собой координаты некоторой точки кривой.

Пример 1.1. Из школы известно, что уравнения $y - x = 0$, $y - x^2 = 0$, $xy - 1 = 0$ представляют собой уравнения кривых: прямой, параболы и гиперболы соответственно (см. рис. 1.6).

При изучении кривых в аналитической геометрии возникают две задачи: 1) составить уравнение кривой по определяющим ее геометрическим свойствам; 2) исследовать геометрические свойства кривой по определяющему ее уравнению.

Рассмотрим обе эти задачи в применении к простейшей кривой — окружности.

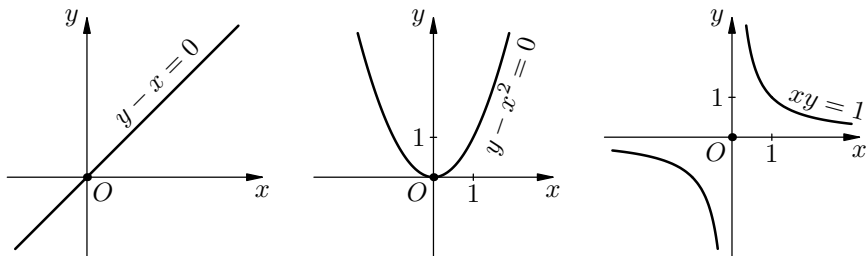


Рис. 1.6.

Пусть $M_0(a, b)$ — некоторая точка плоскости Oxy , R — положительное число. Составим уравнение окружности с центром¹ в точке M_0 и радиусом² R .

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка окружности. Расстояние от M до центра M_0 равно R . Согласно формуле (1.1) для расстояния между двумя точками, получаем:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R,$$

или

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (1.4)$$

Итак, координаты каждой точки окружности удовлетворяют уравнению (1.4).

Наоборот, если точка $M(x, y)$ такова, что ее координаты удовлетворяют уравнению (1.4), то расстояние MM_0 равно R и, следовательно, точка M принадлежит окружности.

Приведенные рассуждения показывают, что уравнение (1.4) является уравнением окружности с центром в точке M_0 и радиусом R .

Рассмотрим теперь вторую задачу. Пусть кривая задана уравнением

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

Уравнение кривой перепишем в следующем виде:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c. \quad (1.5)$$

¹ Слово «**центр**» в буквальном переводе с греческого означает «палка с заостренным концом, стрелало погонщика».

² «**Радиус**» — от латинского слова «radius» — «луч».

Теперь мы можем сделать следующий вывод: если $a^2 + b^2 - c < 0$, то на плоскости нет точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (1.5) (говорят, что в этом случае кривая является мнимой). Если $a^2 + b^2 - c = 0$, то «кривая» состоит из единственной точки $M_0(a, b)$. Если $a^2 + b^2 > 0$, то кривая представляет собой окружность с центром в точке $M_0(a, b)$ и радиусом $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, поскольку, согласно (1.5), каждая точка $M(x, y)$ кривой находится на расстоянии R от точки $M_0(a, b)$.

Пример 1.2. а) Уравнение $x^2 + y^2 = 25$ есть уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $R = 5$.

б) Уравнение $x^2 + y^2 = 2x$ есть уравнение окружности с центром в точке $M_0(1, 0)$ и радиусом $R = 1$, так как оно равносильно уравнению $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Наряду с рассмотренными выше неявными уравнениями часто бывает удобно пользоваться параметрическими уравнениями кривой на плоскости, к рассмотрению которых мы и переходим.

1.4. Параметрические уравнения кривой на плоскости

Представим себе кривую как «след движущейся точки», т. е. пусть точка M движется вдоль кривой и в момент времени t имеет координаты $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \right\}, \quad (1.6)$$

которая задает координаты произвольной точки кривой как функции параметра t , мы будем называть уравнениями кривой в параметрической форме.

Составим уравнение окружности радиуса R в параметрической форме, считая начало координат ее центром

Положение точки $M(x, y)$ на окружности мы будем характеризовать углом t , который образует радиус окружности OM с положительной полуосью оси абсцисс (рис. 1.7). Тогда очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos t \\ y &= R \sin t \end{aligned} \right\}, \quad (1.7)$$

и эта пара уравнений представляет собой уравнения заданной окружности в параметрической форме.

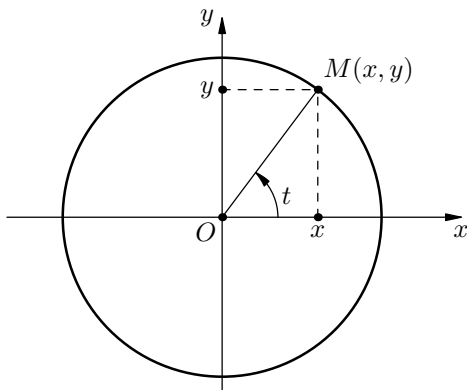


Рис. 1.7.

Имея уравнения кривой в параметрической форме (1.6), можно получить уравнения этой кривой (или ее части) в неявной форме. Для этого достаточно исключить параметр t из уравнений (1.6) каким-либо способом.

Например, чтобы получить уравнение в неявной форме окружности, заданной уравнениями (1.7), достаточно возвести оба эти уравнения в квадрат и сложить:

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2 .$$

Получаем уже известный результат.

Отметим, что параметр t — не обязательно «время». Можно рассматривать любую другую величину, характеризующую положение точки на кривой.

Пример 1.3. Напишем параметрические уравнения кривой $x^3 + y^3 = 3xy$, которая называется **декартовым листом** (рис. 1.8). Легко заметить, что наклонная прямая, проходящая через начало координат, пересекает декартов лист не более чем в одной точке, если не считать начала координат. Действительно, пусть $y = tx$ — уравнение такой прямой. Подставив его в уравнение декартова листа, получим: $x^3 + t^3 x^3 = 3tx^2$, или $(1 + t^3)x = 3t$, если $x \neq 0$. Но тогда

$$x = \frac{3t}{1 + t^3} \quad \text{и} \quad y = tx = \frac{3t^2}{1 + t^3} \quad (t \neq -1),$$

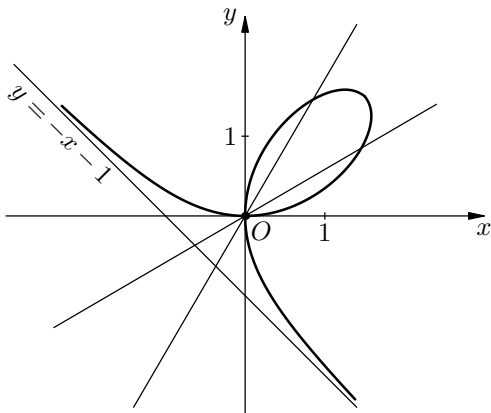


Рис. 1.8.

и мы получили параметрические уравнения декартова листа. Геометрический смысл параметра t здесь таков: это угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат O и точку M декартова листа с координатами (x, y) .

1.5. Полярные координаты на плоскости

Наряду с декартовой системой координат на плоскости часто бывает полезным введение так называемых **полярных координат**.

Пусть O — произвольная точка плоскости — **полюс**. Пусть Ox — исходящий из нее луч — **полярная ось**. Фиксируем направление отсчета углов по отношению к полярной оси, например, против часовой стрелки. Тогда каждая точка M плоскости, отличная от полюса O , определяет два числа:

- 1) положительное число $\rho = OM$ — **полярный радиус** точки M ;
- 2) **полярный угол** φ точки M — угол, который образует отрезок OM с полярной осью Ox (рис. 1.9).

Числа ρ и φ называются **полярными координатами**¹ точки M . Полярные координаты точки M будем записывать рядом с буквенным обозначением точки в квадратных скобках: $M[\rho, \varphi]$.

Будем считать, что полярный радиус точки O (полюса) равен нулю, а полярный угол принимает произвольное значение.

¹ Полярные координаты по существу применялись греческим математиком и механиком Архимедом (287–212 до Р. Х.)

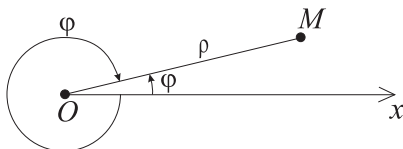


Рис. 1.9.

Полярный радиус точки M определен однозначно, чего нельзя сказать о ее полярном угле: если φ — полярный угол точки M , то угол $\varphi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) также является ее полярным углом.

С другой стороны, если задано произвольное положительное число $\rho > 0$ и произвольное число φ , то существует единственная точка M плоскости, для которой ρ является ее полярным радиусом, а φ — полярным углом.

Таким образом, между точками плоскости и их полярными координатами нет взаимно однозначного соответствия. Это обстоятельство требует повышенного внимания при работе с полярными координатами.

Пример 1.4. Полярные координаты $\rho = 3$, $\varphi = -\pi/2$ определяют точку M_1 (рис. 1.10), полярные координаты $\rho = 3$, $\varphi = 3\pi/2$ определяют ту же точку. Вообще, точке M_1 отвечают полярные координаты $\rho = 3$, $\varphi = -\pi/2 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Аналогично, точке M_2 отвечают полярные координаты $\rho = 2$, $\varphi = \pi/4 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

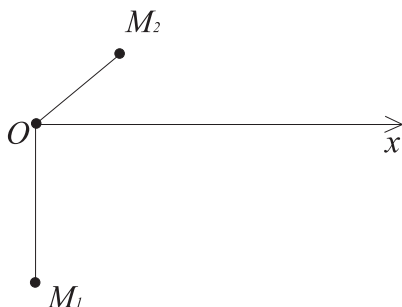


Рис. 1.10.

Можно условиться выделять только одно из значений полярного угла, например, брать φ в пределах $-\pi < \varphi \leq \pi$. Такое значение полярного угла называется **главным**. При введении главных значений

каждой отличной от полюса точке плоскости отвечает одна пара полярных координат. В примере 1.4 это: $M_1 \left[3, -\frac{\pi}{2} \right]$, $M_2 \left[2, \frac{\pi}{4} \right]$.

Установим **связь между полярными и декартовыми координатами** точки на плоскости при следующих общепринятых соглашениях.

Пусть полюс O полярной системы координат совпадает с началом декартовой системы координат Oxy , а полярная ось совпадает с положительной полуосью оси Ox (см. рис. 1.11).

Если M — отличная от O точка плоскости, x и y — ее декартовы, а ρ, φ — полярные координаты, тогда:

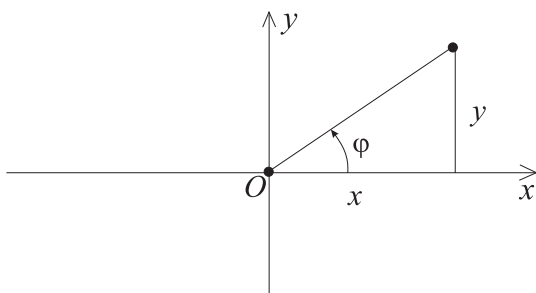


Рис. 1.11.

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (1.8)$$

Обратно:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.9)$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (1.10)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (1.11)$$

Формулы (1.8) дают значения декартовых координат точки через значения ее полярных координат. Формулы (1.9), (1.10) показывают зависимость полярных координат точки от ее декартовых координат.

Заметим, что одной формулы (1.11) или только одной из формул (1.10) не достаточно для того, чтобы определить полярный угол φ .

Пример 1.5. Пусть $x = 2$, $y = -2$ — декартовы координаты точки. Найдем ее полярные координаты. Согласно формуле (1.9), $\rho = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$. Согласно первой из формул (1.10), $\cos \varphi = \sqrt{2}/2$, т.е. $\varphi = \pm\pi/4 + 2\pi n$. Поскольку $\sin \varphi = -\sqrt{2}/2$, полярный угол может принимать значения $\varphi = -\pi/4 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Как и в случае декартовых координат, можно говорить об **уравнении кривой в полярных координатах**. Точнее, уравнение $f(\rho, \varphi) = 0$ называется **уравнением кривой в полярных координатах**, если некоторые из значений полярных координат каждой точки кривой удовлетворяют этому уравнению, и обратно, любая пара чисел $[\rho, \varphi]$, ($\rho > 0$), удовлетворяющая этому уравнению, представляет собой полярные координаты одной из точек кривой.

Пример 1.6. Составим уравнение окружности, которая проходит через полюс, имеет радиус R и центр на полярной оси, в полярных координатах (рис. 1.12). Из прямоугольного треугольника OMN получаем: $OM = ON \cdot \cos \varphi$. Отсюда, уравнение окружности:

$$\rho = 2R \cos \varphi.$$

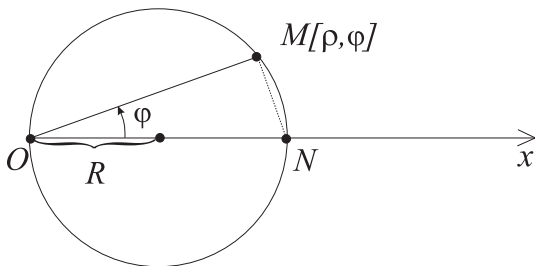


Рис. 1.12.

Пример 1.7. Выведем уравнение декартова листа в полярных координатах (см. пример 1.3). Поскольку уравнение кривой в д.с.к. известно: $x^3 + y^3 = 3xy$, мы можем воспользоваться соотношениями $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

После подстановки получаем: $\rho^3 \cos^3 \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi = 3\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi$, или

$$\rho = \frac{3 \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi},$$

это и есть искомое уравнение.

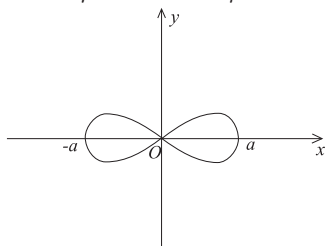
1.6. Примеры классических кривых на плоскости

Здесь мы приведем изображения нескольких замечательных кривых и их уравнения в декартовой или полярной системе координат. Читателю предлагается разобраться в этих рисунках самостоятельно.

Лемниската Бернулли

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

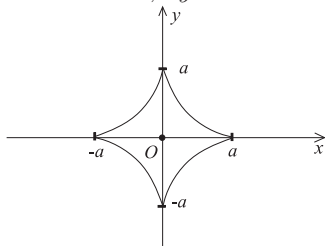
$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$



Астроида

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

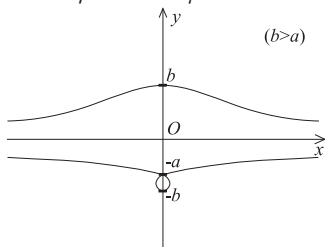
$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$$



Конхоида Никомеда

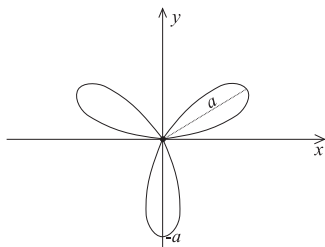
$$x^2 y^2 = (y + a)^2 (b^2 - y^2),$$

$$\rho = a \sec \varphi \pm b.$$



Трехлепестковая роза

$$\rho = a \sin 3\varphi.$$



Спираль Архимеда

$$\rho = a \cdot \varphi.$$

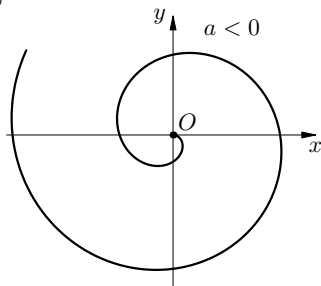
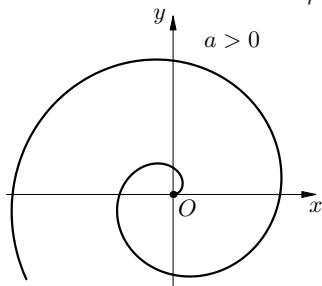


Рис. 1.13.

1.7. Декартовы координаты в пространстве

Для определения положения точки пространства введем в пространстве **декартову систему координат** и сопоставим каждой точке ее **декартовы координаты** в данной системе.

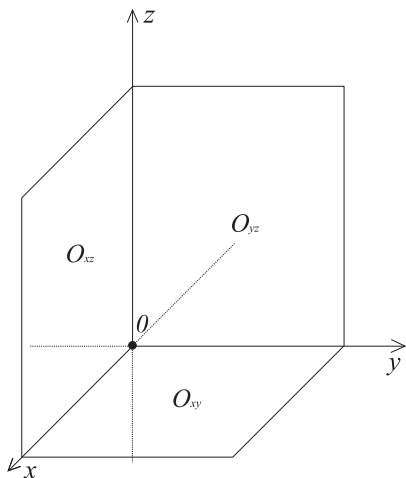


Рис. 1.14.

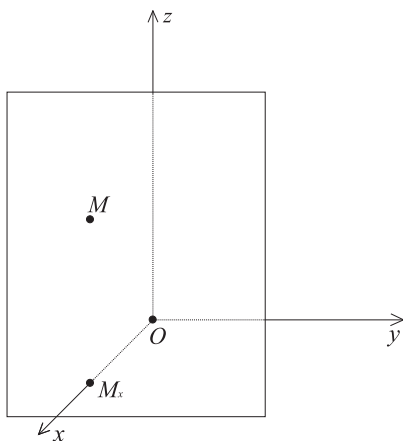


Рис. 1.15.

Выберем в пространстве точку O — **начало системы координат** — и проведем через нее три попарно перпендикулярные прямые. Выбирая на каждой из этих прямых отрицательную и положительную (обозначаемую стрелкой) полуоси, получаем **координатные оси декартовой системы координат** Ox, Oy, Oz .

Плоскость, проходящая через первые две оси, оказывается снабженной декартовой системой координат (см. рис. 1.14). Она называется **координатной плоскостью** Oxy . Аналогично вводятся координатные плоскости Oxz и Oyz .

Перечисленный набор объектов (начало координат O , координатные оси Ox, Oy, Oz и координатные плоскости Oxy, Oxz, Oyz) вместе с единицей измерения длины представляют собой **декартову систему координат в пространстве** (д. с. к.), обозначаемую $Oxyz$.

Возьмем теперь произвольную точку M и проведем через нее плоскость, параллельную координатной плоскости Oyz (рис. 1.15). Пусть M_x — точка пересечения этой плоскости с осью Ox . Координата x точки M_x на оси Ox называется **первой координатой точки** M относительно рассматриваемой д. с. к. Аналогично определяются **вторая**

координата y и третья координата z точки M . Эти координаты также называются соответственно **абсциссой, ординатой и аппликатой** точки M .

Координаты точки M будем записывать в установленном порядке в круглых скобках рядом с буквенным обозначением точки: $M(x, y, z)$.

Подобно тому как это делалось в случае плоскости, доказываемся, что для произвольной тройки чисел (x, y, z) существует, притом единственная точка M , для которой эти числа служат координатами в д.с.к. $Oxyz$.

Координатные плоскости делят пространство на восемь частей — **октантов**. Для точек одного октанта знаки соответствующих координат постоянны. Точки одной координатной плоскости обязательно имеют одну и ту же нулевую координату. Например, у всех точек координатной плоскости Oyz первая координата нулевая.

Точки, которые принадлежат одной координатной оси, обязательно имеют две одинаковые нулевые координаты. Так, у всех точек координатной оси Ox нулевыми являются первая и третья координаты.

У точки, являющейся началом системы координат (и только у нее), все координаты равны нулю.

Расстояние между двумя точками. Выразим расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ через координаты этих точек.

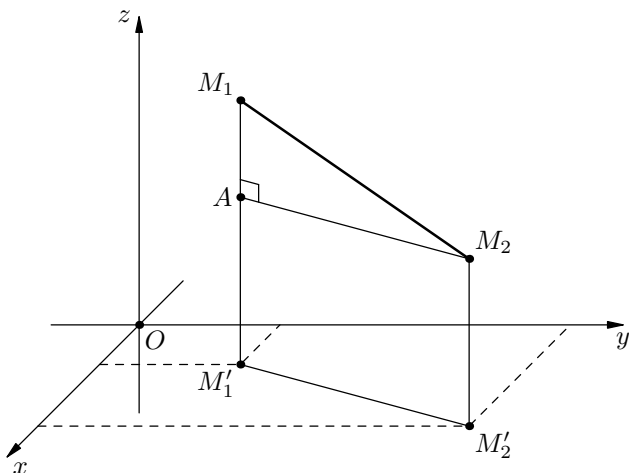


Рис. 1.16.

Пусть прямая M_1M_2 не параллельна оси Oz (рис. 1.16).

Проведем через точки M_1 и M_2 прямые, параллельные оси Oz , до их пересечения с плоскостью Oxy . Пусть M'_1 и M'_2 — точки пересечения этих прямых с Oxy (рис. 1.16). Первые две координаты точек M_1 и M'_1 совпадают. Это же справедливо для точек M_2 и M'_2 .

Проведем через точку M_2 плоскость, параллельную плоскости Oxy . Пусть A — точка пересечения этой плоскости с прямой $M_1M'_1$. Тогда $M_1M_2^2 = AM_1^2 + AM_2^2$ по теореме Пифагора. Кроме того, $AM_2^2 = (M'_1M'_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Поскольку $AM_1^2 = (z_1 - z_2)^2$, получаем, что расстояние M_1M_2 между точками равно

$$M_1M_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

или

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad (1.12)$$

Если прямая M_1M_2 параллельна оси Oz , то $M_1M_2 = |z_1 - z_2|$. Тот же результат дает и формула (1.12), т. к. в этом случае $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Деление отрезка в данном отношении. Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — две различные точки в пространстве. Выразим координаты точки $M(x, y, z)$ отрезка M_1M_2 , делящей этот отрезок в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$, через координаты точек M_1 и M_2 .

Для этого проведем через точки M_1, M_2 и M прямые, параллельные оси Oz . Они пересекут плоскость Oxy в точках $M'_1(x_1, y_1, 0)$, $M'_2(x_2, y_2, 0)$ и $M'(x, y, 0)$. По свойству параллельного проектирования

$$\frac{M'_1M'}{M'M'_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Отсюда, как уже известно (см. формулы (1.3)), координаты точки $M'(x, y, 0)$ таковы:

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Аналогично, если проектировать точки на плоскость Oxz , то получим:

$$z = \frac{\lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Окончательно, координаты точки M таковы:

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad z = \frac{\lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (1.13)$$

ГЛАВА 2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Известно, что уравнение $x^2 - 2 = 0$ не имеет решений среди рациональных чисел. Это дает повод для расширения множества рациональных чисел таким образом, чтобы оно содержало корни данного уравнения, которые обозначают символами $\pm\sqrt{2}$.

Аналогичная задача возникает и для уравнения $x^2 + 1 = 0$, которое не имеет вещественных корней. Мы хотим расширить множество вещественных чисел так, чтобы данное уравнение имело корни в этой «расширенной числовой системе» и алгебраические операции над её элементами обладали теми же свойствами, что и операции сложения и умножения вещественных чисел.

2.1. Понятие комплексного числа

Рассмотрим элементы вида $x + iy$, где x и y — вещественные числа, а i — некоторый символ, называемый **мнимой единицей**.

Назовем элемент $z = x + iy$ **комплексным числом**¹, x — его **вещественной**, а y — **мнимой** частью и будем писать: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Так, например, $z = -1/2 + i(\sqrt{\pi})$ — комплексное число, причем $\operatorname{Re} z = -1/2$, $\operatorname{Im} z = \sqrt{\pi}$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их вещественные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Для сокращения записи мы будем писать вместо $x + i0$ и $0 + iy$ соответственно x и iy , в частности, $0 + i0 = 0$.

Числа вида iy , ($y \neq 0$), называются **чисто мнимыми**, а вида $x + i0 = x$ — **вещественными**.

Введем обозначение $\mathbb{C}$ для множества всех комплексных чисел.

Теперь мы приступим к определению операций над комплексными числами.

I. Сложение комплексных чисел. Определение суммы комплексных чисел не содержит неожиданностей. Для комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ их **сумма — комплексное число, обозначаемое $z_1 + z_2$, — определяется равенством:**

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (2.1)$$

¹ Комплексные числа были введены итальянским математиком и инженером Р. Бомбелли (1526–1573) в связи с изучением т. н. «неприводимого случая» формулы корней кубического уравнения.

Итак, вещественная и мнимая части суммы комплексных чисел суть суммы соответственно вещественных и мнимых частей слагаемых.

Например, если $z_1 = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\pi}$, $z_2 = 1 + i\sqrt{\pi}$, то $z_1 + z_2 = \frac{1}{2} + i \cdot 2\sqrt{\pi}$.

Поскольку при сложении комплексных чисел их вещественные и мнимые части складываются «отдельно», легко установить, что операция сложения комплексных чисел обладает следующими свойствами:

I₍₁₎ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

I₍₂₎ $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

I₍₃₎ $z + 0 = z$ для каждого $z \in \mathbb{C}$.

I₍₄₎ Для любого числа $z \in \mathbb{C}$ существует единственное число, называемое ему **противоположным** и обозначаемое $-z$, для которого $z + (-z) = 0$.

Число $z_1 + (-z_2)$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$), называется **разностью** комплексных чисел z_1 и z_2 и обозначается $z_1 - z_2$.

Если, например, по-прежнему $z_1 = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\pi}$, $z_2 = 1 + i\sqrt{\pi}$, то $z_1 - z_2 = -3/2$.

II. Умножение комплексных чисел. Для определения произведения комплексных чисел определим сначала квадрат мнимой единицы: $i^2 = i \cdot i = -1$.

Произведение двух произвольных комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определим, далее, как результат почленного умножения $x_1 + iy_1$ на $x_2 + iy_2$ с использованием равенства $i^2 = -1$ и последующего сложения полученных элементов:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + iy_2 x_1 - y_1 y_2 = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Заметим, что если бы мы определили произведение комплексных чисел z_1 и z_2 формально с помощью равенства:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

то из такого определения уже следовало бы, что $i^2 = -1$; действительно:

$$i^2 = i \cdot i = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = -1.$$

Пример 2.1.

а) $(-1 + 2i)(4 - 3i) = 2 + 11i$.

б) если $z_1 = x_1$ — вещественное число и $z_2 = x_2 + iy_2$, то $z_1 \cdot z_2 = x_1(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2$.

в) если $z_1 = x + iy$, а $z_2 = x - iy$, то $z_1 \cdot z_2 = x^2 + y^2$.

Таким образом, произведение комплексных чисел $(x + iy)(x - iy)$ всегда **неотрицательно** и равно нулю лишь тогда, когда $x = y = 0$, т. е. $x + iy = 0$.

Относительно свойств операции умножения комплексных чисел справедливы следующие утверждения:

II₍₁₎ $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

II₍₂₎ $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2)z_3$ для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

II₍₃₎ $1 \cdot z = z$ для каждого $z \in \mathbb{C}$.

II₍₄₎ Для любого ненулевого комплексного числа z существует единственное число, называемое ему **обратным** и обозначаемое z^{-1} (или $1/z$), для которого $z \cdot z^{-1} = 1$.

Справедливость свойства **II₍₁₎** следует непосредственно из соотношения (2.2).

Прямая проверка доказывает свойство **II₍₂₎**:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (x_1 + iy_1) [(x_2 + iy_2)(x_3 + iy_3)] = \\ &= (x_1 + iy_1) [(x_2x_3 - y_2y_3) + i(x_2y_3 + x_3y_2)] = \\ &= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1x_3y_2) + \\ &\quad + i(y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3 + x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= [(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)](x_3 + iy_3) = \\ &= [(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)](x_3 + iy_3) = \\ &= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3) + \\ &\quad + i(x_1y_2x_3 + x_2y_1x_3 + x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3). \end{aligned}$$

Свойство **II₍₃₎** есть частный случай свойства, установленного в примере 2.1 б).

Наконец, если $z = x + iy \neq 0$, то обратное ему комплексное число имеет вид:

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Это доказывается непосредственным умножением:

$$(x + iy) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = 1.$$

Заметим, что число, обратное к комплексному числу z , единственно. Действительно, пусть $z \cdot w = 1$. Умножив обе части этого равенства на z^{-1} , получаем: $z^{-1} \cdot z \cdot w = z^{-1}$, и, следовательно, $w = z^{-1}$.

Число $z_1 \cdot z_2^{-1}$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0$) называется **частным** комплексных чисел z_1 и z_2 и обозначается z_1/z_2 .

Из сказанного выше следует способ нахождения частного двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Итак,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пример 2.2.

$$\frac{2 + 3i}{-1 + 4i} = \frac{(2 + 3i)(-1 - 4i)}{(-1 + 4i)(-1 - 4i)} = \frac{10 - 11i}{17} = \frac{10}{17} - \frac{11}{17}i.$$

Еще отметим связь, существующую между операциями сложения и умножения комплексных чисел:

$$\text{III} \quad (z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 \quad \text{для любых } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Суммируя все сказанное до сих пор, мы можем теперь дать полное определение множества комплексных чисел $\mathbb{C}$: **множество всех элементов $x + iy$, в котором определены операции сложения, вычитания, умножения и деления согласно изложенным выше правилам, называется множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$; каждый элемент этого множества называется комплексным числом**¹.

2.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Известно несколько геометрических интерпретаций комплексных чисел. Мы рассмотрим наиболее распространенную.

Выберем на некоторой плоскости декартову систему координат и заметим, что каждому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует упорядоченная пара вещественных чисел (x, y) , т. е. точка на декартовой плоскости. Наоборот, каждой точке декартовой плоскости с координатами (x, y) соответствует комплексное число $z = x + iy$.

В результате, комплексное число $z = x + iy$ можно рассматривать как точку на декартовой плоскости с координатами (x, y) , которую будем обозначать той же буквой: $z(x, y)$ (рис. 2.1).

¹ Термин «**комплексное число**» появился в 1831 году (Гаусс), «**мнимый**» — в 1637 году (Декарт), «**модуль**» (см. ниже) — в 1806 году (Арган), «**аргумент**» — в 1838 году (Коши); обозначение i введено в 1777 году (Эйлер).

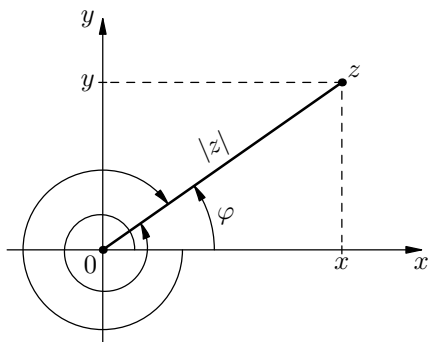


Рис. 2.1.

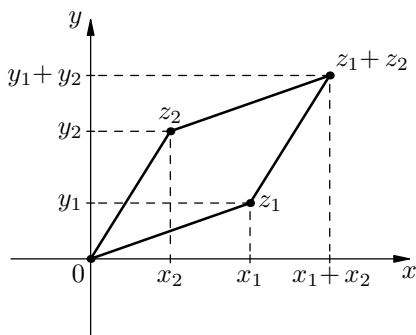


Рис. 2.2.

Целесообразность такой интерпретации следует уже из того, что геометрически сложение комплексных чисел осуществляется по «правилу параллелограмма», хорошо известному из школьного курса физики, а также из курса геометрии (рис. 2.2).

Декартова плоскость, точки которой $z(x, y)$ интерпретируются как комплексные числа, называется **комплексной плоскостью**¹, ее ось Ox — **вещественной осью**, а ось Oy — **мнимой осью**.

Расстояние от точки $z(x, y)$, изображающей комплексное число $z = x + iy$, до начала координат, называется **модулем** (или **абсолютной величиной**) комплексного числа z и обозначается $|z|$. Ясно, что

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.3)$$

Обратимся снова к рис. 2.2 и положим $z = z_1 + z_2$, тогда $z_2 = z - z_1$. Из равенства противоположных сторон Oz_2 и z_1z параллелограмма вытекает следующее утверждение: **модуль разности двух комплексных чисел $|z - z_1|$ представляет собой расстояние между точками, изображающими комплексные числа z и z_1 .**

Поскольку длина каждой стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон и не меньше, чем абсолютная величина их разности, для любых комплексных чисел z_1 и z_2 выполняются

¹ Геометрическая интерпретация комплексных чисел впервые появилась в работе 1799 года датского геодезиста К. Весселя. Позднее она возникла в трудах французского аббата А. Бюэ и швейцарского математика Ж. Аргана (работы 1806 года). Всеобщую известность представление комплексных чисел точками плоскости получило в 1831 году после выхода в свет работы К. Ф. Гаусса (1777–1856) по теории биквадратичных вычетов.

неравенства:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|. \quad (2.4)$$

Пример 2.3. На рисунке 2.3 изображены множества точек комплексной плоскости, определенные выражениями, содержащими знак модуля.

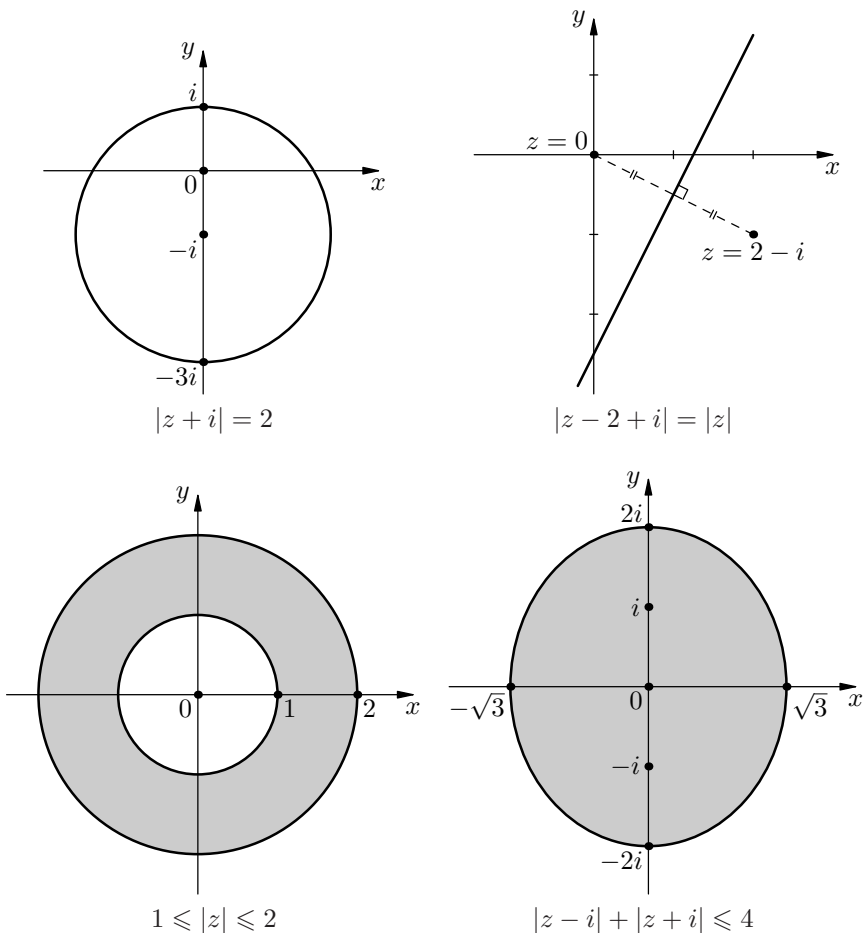


Рис. 2.3.

Наряду с декартовыми координатами на комплексной плоскости рассмотрим полярные координаты, приняв начало координат за полюс, а положительную полуось Ox за полярную ось.

Тогда для ненулевого комплексного числа $z = x + iy$ согласно формулам (1.8) имеем:

$$x = |z| \cos \varphi, \quad y = |z| \sin \varphi,$$

где $|z|$ — модуль комплексного числа z , а φ — один из полярных углов точки $z(x, y)$, изображающей комплексное число z .

При этом φ называется **значением аргумента** комплексного числа z . Подчеркнем еще раз, что значение аргумента φ комплексного числа z определено неоднозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π (рис. 2.1).

Множество всех значений аргумента комплексного числа z называется **аргументом** комплексного числа z и обозначается $\text{Arg } z$.

Итак,

$$\text{Arg } z = \left\{ \varphi \in \mathbb{R} \mid \cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \sin \varphi = \frac{y}{|z|}, \text{ где } z = x + iy \neq 0 \right\}. \quad (2.5)$$

Значение аргумента φ комплексного числа z , удовлетворяющее ограничениям: $-\pi < \varphi \leq \pi$, называется **главным значением аргумента** этого комплексного числа. Оно обозначается $\arg z$.

2.3. Тригонометрическая форма комплексного числа

Если теперь $z = x + iy$ — ненулевое комплексное число, то мы можем записать:

$$z = x + iy = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ где } \varphi \in \text{Arg } z. \quad (2.6)$$

Правая часть равенства (2.6) называется **тригонометрической формой** комплексного числа z . Иногда запись (2.6) употребляется и для $z = 0$; в этом случае $|z| = 0$, а φ может принимать любое значение (аргумент числа 0 не определен).

Пример 2.4. Найдем модуль, аргумент и тригонометрическую форму комплексного числа $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Имеем:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

$$\operatorname{Arg} z = \left\{ \varphi \mid \cos \varphi = -\frac{1}{2}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} = \left\{ \varphi = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$\arg z = \frac{2\pi}{3}$ — главное значение аргумента комплексного числа z .

$z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ — тригонометрическая форма числа z .

Переход к тригонометрической форме записи комплексных чисел полезен при их умножении и делении; кроме того, он раскрывает геометрический смысл этих операций.

Пусть $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ — два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме. Тогда:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= |z_1||z_2| \left(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \right. \\ &\quad \left. + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) \right) = \\ &= |z_1||z_2| \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right). \end{aligned}$$

Итак, произведение $z_1 z_2$ преобразуется к тригонометрической форме комплексного числа, модуль которого равен $|z_1| \cdot |z_2|$, а в качестве значения аргумента выступает сумма углов φ_1 и φ_2 .

Следовательно, модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а одним из значений аргумента произведения является сумма значений аргументов сомножителей.

Это можно записать так:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2. \quad (2.7)$$

Данные правила распространяются на произведение любого числа сомножителей:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2 \dots z_n| &= |z_1| |z_2| \dots |z_n|; \\ \operatorname{Arg}(z_1 z_2 \dots z_n) &= \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + \dots + \operatorname{Arg} z_n. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Вопрос о делении комплексных чисел z_1 и z_2 , заданных в тригонометрической форме, решается аналогично:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{|z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{|z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{|z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} =$$

$$= \frac{|z_1|(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1))}{|z_2|(\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)} =$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Следовательно, модуль частного двух комплексных чисел равен частному их модулей, а одним из значений аргумента частного является разность значений аргументов делимого и делителя:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad \text{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2. \quad (2.9)$$

Пример 2.5. Пусть даны два комплексных числа:

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{и} \quad z_2 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Тогда $z_1 z_2 = \sqrt{6} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$, т. е. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$
и $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2\pi k = \frac{7\pi}{12} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

2.4. Формула Муавра

Согласно (2.8) мы имеем формулу:

$$|z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \dots |z_n|(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n) =$$

$$= |z_1| \dots |z_n| (\cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)).$$

Предположим теперь, что в последней формуле все сомножители равны, так что $|z_1| = \dots = |z_n| = |z|$ и $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = \varphi$, и, кроме того, $|z| = 1$.

Тогда мы приходим к **формуле Муавра**¹:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (2.10)$$

Отметим, что легко доказать справедливость формулы Муавра для всех целых показателей n , а не только для натуральных, как это было сделано выше.

¹ «Формула Муавра» впервые появилась в статье 1707 года английского математика французского происхождения А. де Муавра (1667–1754). Им же позднее в 1722 году была частично решена задача об извлечении корня из комплексного числа.

Рассмотрим два примера применения формулы Муавра к преобразованиям тригонометрических выражений.

Пример 2.6. Пусть тригонометрические функции кратного аргумента $\sin 5\varphi$, $\cos 5\varphi$, $\operatorname{tg} 5\varphi$ требуется выразить через тригонометрические функции исходного аргумента φ .

Согласно формуле Муавра имеем соотношение:

$$\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5.$$

Раскрывая правую часть этого равенства с помощью бинома Ньютона, получаем:

$$\begin{aligned} \cos 5\varphi + i \sin 5\varphi = & \cos^5 \varphi + 5i \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi - \\ & - 10i \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi + i \sin^5 \varphi \end{aligned}$$

(мы воспользовались тем, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$).

Отделяя вещественные и мнимые части в обеих частях равенства, получаем:

$$\cos 5\varphi = \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi,$$

$$\sin 5\varphi = 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi,$$

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{\sin 5\varphi}{\cos 5\varphi} = \frac{5 \operatorname{tg} \varphi - 10 \operatorname{tg}^3 \varphi + \operatorname{tg}^5 \varphi}{1 - 10 \operatorname{tg}^2 \varphi + 5 \operatorname{tg}^4 \varphi}.$$

Подобным образом решается задача о выражении тригонометрических функций кратного аргумента через тригонометрические функции исходного и в общем случае.

Пример 2.7. Выразим функцию $\sin^5 \varphi$ линейно через тригонометрические функции кратных аргументов.

Пусть $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, тогда $z^{-1} = \cos \varphi - i \sin \varphi$. Согласно формуле Муавра имеем:

$$z^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi, \quad z^{-k} = \cos k\varphi - i \sin k\varphi.$$

Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos k\varphi = \frac{z^k + z^{-k}}{2}, \quad \sin k\varphi = \frac{z^k - z^{-k}}{2i}.$$

Воспользовавшись этими формулами, получаем:

$$\sin^5 \varphi = \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^5 = \frac{z^5 - 5z^3 + 10z - 10z^{-1} + 5z^{-3} - z^{-5}}{32i} =$$

$$= \frac{(z^5 - z^{-5}) - 5(z^3 - z^{-3}) + 10(z - z^{-1})}{32i} =$$

$$= \frac{2i \sin 5\varphi - 10i \sin 3\varphi + 20i \sin \varphi}{32i} = \frac{1}{16}(\sin 5\varphi - 5 \sin 3\varphi + 10 \sin \varphi).$$

Аналогично, любое выражение вида $\cos^k \varphi \cdot \sin^m \varphi$ можно представить через функции кратных углов.

2.5. Показательная форма комплексного числа

Показательная функция комплексного переменного. Для вещественных x показательная функция e^x хорошо известна. Как определить e^w , если w — комплексное число?

Пусть $w = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. По определению¹ положим, что

$$e^w = e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta). \quad (2.11)$$

В частности, $e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta$.

Пример 2.8. $e^{i\pi} + 1 = 0$, т. к. по определению $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$. Это равенство выявляет замечательную связь между важнейшими числами, встречающимися в математике: $0, 1, e, \pi, i$.

Установим теперь **основное свойство показательной функции комплексного переменного: при умножении значений показательной функции ее показатели складываются.**

Действительно, пусть $w_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $w_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ — комплексные числа. Тогда

$$e^{w_1} e^{w_2} = e^{\alpha_1+i\beta_1} \cdot e^{\alpha_2+i\beta_2} = e^{\alpha_1} (\cos \beta_1 + i \sin \beta_1) \cdot e^{\alpha_2} (\cos \beta_2 + i \sin \beta_2) =$$

$$= e^{\alpha_1+\alpha_2} (\cos(\beta_1 + \beta_2) + i \sin(\beta_1 + \beta_2)) = e^{(\alpha_1+\alpha_2)+i(\beta_1+\beta_2)} = e^{w_1+w_2}.$$

Формулы Эйлера. Поскольку $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$, заменяя φ на $-\varphi$, мы получаем: $\cos \varphi - i \sin \varphi = e^{-i\varphi}$. Складывая и вычитая почленно эти два равенства, мы приходим к формулам:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \quad (2.12)$$

Эти формулы называются **формулами Эйлера**. Они устанавливают связь **тригонометрических функций с показательной**.

¹ Определение показательной функции комплексного переменного дал Эйлер в 1748 году.

Наконец, если комплексное число z представлено в тригонометрической форме: $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то, согласно сказанному выше, мы можем записать: $z = |z|e^{i\varphi}$.

Это показательная форма комплексного числа.

Пример 2.9. Приведем примеры записей комплексных чисел в показательной форме: $1 = e^{i0}$; $i = e^{i\pi/2}$; $-1 + i = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$.

Ясно, что умножение и деление комплексных чисел $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$ в показательной форме производится по правилам:

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

ГЛАВА 3. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

В приложениях **векторной величиной** (вектором) называется всякая величина, имеющая направление. Таковы сила, действующая на тело, скорость движения точки и т. п.

В противоположность векторным величинам, **скалярные величины** (скаляры) не имеют направления, а характеризуются числом (скаляром). Например, масса тела, его объем и т. д. — скалярные величины.

Мы дадим геометрическое понятие вектора и определим операции над векторами: сложение, вычитание, умножение (скалярное и векторное). Эти операции по своим формальным свойствам во многом подобны одноименным алгебраическим операциям над числами. Поэтому раздел аналитической геометрии, изучающий действия над векторами, называется **векторной алгеброй**¹. Изучению векторной алгебры мы посвятим третью и четвертую главы.

3.1. Понятие вектора

Вектором в пространстве (на плоскости или на прямой) называется отрезок, для которого указано, какой из его концов считается первым (начало вектора), а какой — вторым (его конец)².

Вектор, началом которого является точка A , а концом — точка B , мы будем обозначать: $\overrightarrow{AB}$. На чертежах векторы обозначаются стрелками, идущими из начала вектора в его конец.

Если точки A и B совпадают, то вектор называется **нулевым**. В этом случае мы будем говорить также, что вектор $\overrightarrow{AB}$ равен нулю и писать: $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

¹ Идея создания «исчисления направленных отрезков» принадлежит Лейбницу. Основной вклад в создание векторного исчисления принадлежит ирландскому математику В. Р. Гамильтону (1805–1865) и немецкому математику Г. Г. Грассману (1809–1877). Современный вид векторная алгебра (и векторный анализ) приобрели в трудах американского физика Д. В. Гиббса (1839–1903)(1881).

² Термины «вектор» (от латинского vector — «переноситель») и «скаляр» (от латинского scala — «лестница») ввел ирландский математик, механик и физик В. Р. Гамильтон (1805–1865). Последний термин связан с тем, что Гамильтон представлял себе вещественные числа, расположенные «как ступеньки лестницы» (ср. «шкала»).

Часто мы будем обозначать векторы малыми латинскими буквами со стрелочками над ними: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}$ и т. д.

Два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **коллинеарными**, если прямые AB и CD параллельны или совпадают. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору¹ (рис. 3.1).

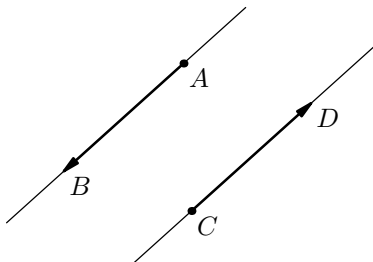


Рис. 3.1.

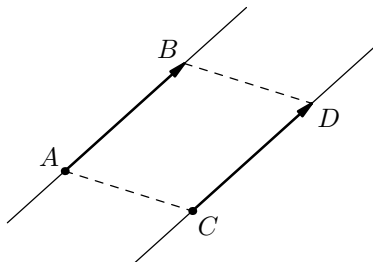


Рис. 3.2.

Два вектора называются **равными**, если один из них может быть получен параллельным переносом из другого (рис. 3.2).

Для равных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ мы будем писать: $\vec{a} = \vec{b}$.

Очевидно, что если вектор $\vec{a}$ равен $\vec{b}$, то $\vec{b}$ равен $\vec{a}$. Если вектор $\vec{a}$ равен $\vec{b}$, а $\vec{b}$ равен $\vec{c}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равны.

Отметим, что определенное нами равенство векторов отличается от более распространенного в математике понимания «равенства» как «совпадения» и больше напоминают язык элементарной геометрии, когда говорят о равенстве треугольников, пирамид и т. д.

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ или его **модулем** называется длина отрезка AB . Длины векторов мы обозначаем знаком абсолютной величины: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Равные векторы имеют, конечно, равные длины. Обратное не верно. Полезно, однако, отметить, что равенство нулю длины вектора означает, что сам вектор нулевой.

Вектор, длина которого равна 1, называется **единичным вектором** или **ортом**.

¹ Слово «коллинеарный» (для 2-х векторов) происходит от латинских слов cum — «с» и linea — «(прямая) линия». В свою очередь слово linea происходит от латинского linum — «лен». Ленная нить имела в виду и натянутая — линия в смысле «прямая» — и ненатянутая — линия в смысле «кривая».

Отложить вектор $\overrightarrow{AB}$ от точки O (привести вектор к началу O) — это значит построить вектор $\overrightarrow{OC}$, равный вектору $\overrightarrow{AB}$.

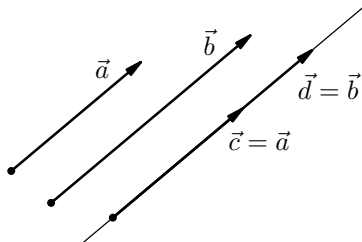


Рис. 3.3.

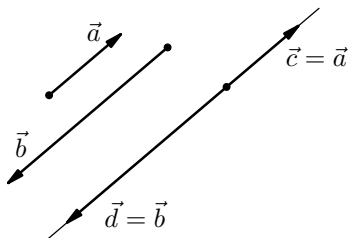


Рис. 3.4.

Два ненулевых вектора называются **одинаково направленными** (противоположно направленными), если они коллинеарны и у равных им векторов, приведенных к общему началу, концы располагаются по одну сторону от начала (рис. 3.3) (по разные стороны от начала, рис. 3.4).

Направление нулевого вектора не определено.

3.2. Операции над векторами

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется новый вектор $\vec{b}$, для которого $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и который одинаково направлен с $\vec{a}$ в случае, если $\lambda > 0$, и имеет противоположное направление, если $\lambda < 0$. Считаем, что $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ (рис. 3.5).

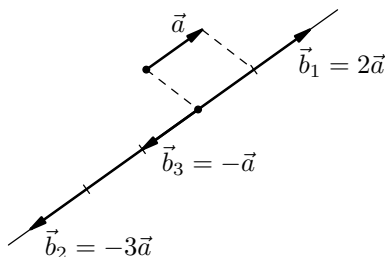


Рис. 3.5.

Вектор $(-1)\vec{a}$ называется противоположным вектору $\vec{a}$ и обозначается: $-\vec{a}$.

Из определения следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ коллинеарны. Обратно, **если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то один из них получается из другого умножением на число.** Действительно, если $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$, то утверждение очевидно. Если один из векторов ненулевой, например $\vec{a}$, то $\vec{b} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$, где знак плюс берется в случае, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, и знак минус, когда их направления противоположны.

Всякий ненулевой вектор $\vec{a}$ можно выразить через единичный вектор того же направления. Действительно:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \left(\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right).$$

Очевидно, что вектор $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ — орт.

Задание ненулевого вектора, параллельного прямой, определяет **направление** или **ориентацию прямой**, т. е. превращает прямую в ось (см. гл. 1).

Это наиболее распространенный способ введения осей. В дальнейшем для указания направления на прямой мы часто будем использовать единичные векторы.

Определим операцию сложения векторов. Суммой векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{f}$ называется новый вектор $\vec{g}$, замыкающий ломаную линию, построенную из данных векторов так, что каждый последующий вектор откладывается от конца предыдущего (рис. 3.6).

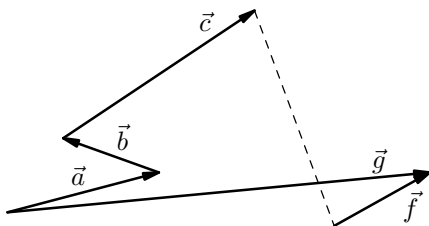


Рис. 3.6.

Сумму векторов будем обозначать: $\vec{g} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots + \vec{f}$. (Отметим, что по введенному правилу складываются не только перемещения, но силы, скорости и другие векторные величины в физике.)

Поскольку длина ломаной не меньше, чем длина отрезка, соединяющего ее концы, имеем:

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots + \vec{f}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + \dots + |\vec{f}|. \quad (3.1)$$

Отметим случай, когда конец ломаной совпадает с ее началом. Тогда

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots + \vec{f} = \vec{0}.$$

Для сложения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно использовать **правило параллелограмма**¹: сумма двух векторов $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$, приведенных к общему началу O , есть **вектор-диагональ** $\vec{OC}$ параллелограмма $OACB$, построенного на векторах $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ (рис. 3.7).

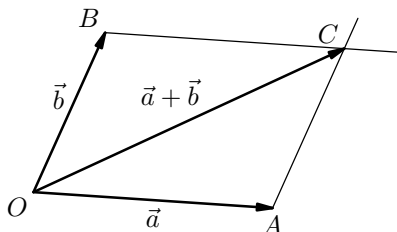


Рис. 3.7.

Операция **вычитания векторов** определяется как операция, обратная к операции сложения.

Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Таким образом, по определению, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ и $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ — записи, имеющие один и тот же смысл.

Построение разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ видно из рис. 3.8.

Ясно, что для того, чтобы вычесть вектор $\vec{b}$, достаточно прибавить противоположный вектор $(-\vec{b})$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$.

Теперь рассмотрим основные свойства операций сложения векторов и умножения вектора на число.

I. Сложение векторов коммутативно, т.е. для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Доказательство утверждения ясно из рис. 3.9.

¹ Еще Архимед складывал действующие на тело силы по «правилу параллелограмма», т.е. интуитивно вводил особые объекты, которые характеризуются не только величиной, но и направлением.

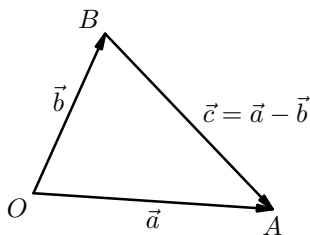


Рис. 3.8.

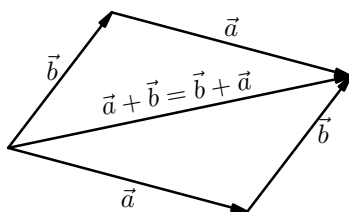


Рис. 3.9.

Итак, при рассмотрении суммы нескольких векторов мы можем переставлять слагаемые произвольным образом. Например:

$$\vec{a} - 4\vec{b} + 3\vec{c} - \vec{d} = -\vec{d} + 3\vec{c} + \vec{a} - 4\vec{b}.$$

II. Сложение векторов ассоциативно. Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — любые векторы, то

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Доказательство утверждения ясно из рис. 3.10.

Итак, при нахождении суммы нескольких векторов мы можем группировать слагаемые произвольным образом. Например:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = ((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}) + \vec{d} = (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} + (\vec{b} + (\vec{c} + \vec{d})).$$

III. Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

$$\text{III}_{(1)} : \quad \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}.$$

$$\text{III}_{(2)} : \quad (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}.$$

$$\text{III}_{(3)} : \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

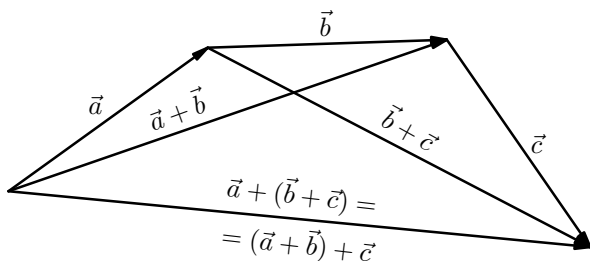


Рис. 3.10.

Таким образом, раскрывать скобки можно по формальным правилам, известным для чисел.

Свойство $\text{III}_{(1)}$ очевидно. В справедливости свойства $\text{III}_{(2)}$ можно убедиться, рассмотрев различные возможности для знаков чисел λ и μ .

Докажем свойство $\text{III}_{(3)}$. Его справедливость очевидна, если один из векторов $\vec{a}, \vec{b}$ нулевой или число λ равно нулю. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то один из них, например, $\vec{b}$, можно представить в виде $\vec{b} = \mu\vec{a}$, и все сводится к свойству $\text{III}_{(2)}$: $\lambda(1+\mu)\vec{a} = \lambda(\vec{a} + \mu\vec{a}) = \lambda\vec{a} + \lambda\mu\vec{a}$, отсюда $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Тогда при $\lambda > 0$ вектор $\overrightarrow{AB}$ изображает, с одной стороны, вектор $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$, с другой — вектор $\lambda\overrightarrow{AC} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$ (рис. 3.11).

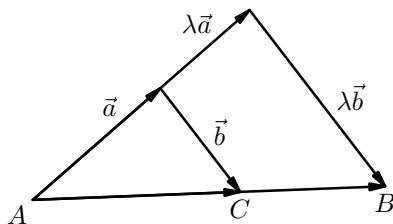


Рис. 3.11.

При $\lambda < 0$ оба вектора меняют свои направления на противоположные.

3.3. Компланарные векторы

Три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются компланарными, если они параллельны одной плоскости. Три вектора считаются компланарными также в том случае, если среди них есть нулевой вектор.

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Приведем векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ к общему началу O (рис. 3.12).

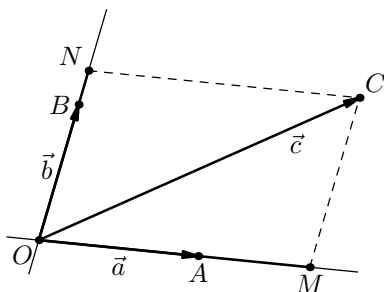


Рис. 3.12.

Через конец C вектора $\vec{c}$ проведем прямые $CN \parallel OA$ и $CM \parallel OB$. Ясно, что $\vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON}$. Однако $\vec{OM} = \lambda \vec{OA} = \lambda \vec{a}$, т. к. векторы $\vec{a}$ и $\vec{OM}$ коллинеарны. Аналогично $\vec{ON} = \mu \vec{OB} = \mu \vec{b}$, т. к. коллинеарны $\vec{b}$ и $\vec{ON}$. Имеем:

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}. \quad (3.2)$$

Если вектор $\vec{c}$ представлен в виде (3.2), то говорят, что этот вектор разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Итак, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы, то любой вектор $\vec{c}$, им компланарный, может быть разложен по этим векторам. Легко видеть, что при соблюдении оговоренных условий такое разложение единственно.

Аналогично можно доказать, что если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — некомпланарные векторы, то любой вектор $\vec{d}$ может быть разложен по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, т. е. представлен в виде

$$\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}, \quad (3.3)$$

причем такое разложение единственно (рис. 3.13).

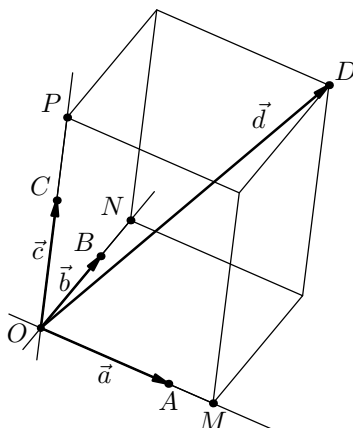


Рис. 3.13.

3.4. Базис и координаты вектора

Рассмотрим некоторую плоскость. **Базисом¹** на плоскости будем называть произвольную упорядоченную пару неколлинеарных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ этой плоскости.

В этом случае каждый вектор $\vec{a}$ плоскости может быть единственным образом разложен по векторам базиса (см. выше):

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2. \quad (3.4)$$

Упорядоченная пара чисел (a_1, a_2) дает нам по определению координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Вектор $\vec{a}$ с координатами a_1, a_2 мы будем обозначать так: $\vec{a}(a_1, a_2)$.

При выбранном базисе имеем следующие свойства координат:

- 1) координаты всякого вектора определены однозначно;
- 2) координаты суммы двух векторов равны суммам соответствующих координат;
- 3) координаты произведения вектора на число равны произведениям соответствующих координат вектора на это число.

Для примера убедимся в справедливости свойства 2).

Пусть $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$ — векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и их координаты в базисе e_1, e_2 . Тогда $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$; $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$. Следовательно,

$$\vec{a} + \vec{b} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2.$$

¹ Базис — в переводе с греческого — «основание».

В силу единственности разложения каждого вектора по базису получаем, что вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $a_1 + b_1$ и $a_2 + b_2$.

Базисом в пространстве будем называть произвольную упорядоченную тройку некомпланарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Как нам уже известно, каждый вектор $\vec{a}$ пространства может быть единственным образом разложен по векторам базиса:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3. \quad (3.5)$$

Упорядоченная тройка чисел (a_1, a_2, a_3) представляет собой по определению координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Вектор $\vec{a}$ с координатами a_1, a_2, a_3 будем обозначать так: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$. Как и в случае плоскости, для координат векторов в пространстве справедливы утверждения:

- 1) координаты вектора в выбранном базисе определены однозначно;
- 2) если $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, то $(\vec{a} + \vec{b})(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$;
- 3) если вектор $\vec{a}$ имеет координаты (a_1, a_2, a_3) и λ — число, то вектор $\lambda\vec{a}$ имеет координаты $(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

3.5. Радиус-вектор точки

Понятие радиуса-вектора точки мы рассмотрим для точек в пространстве. Аналогичные рассмотрения на плоскости предоставляются читателю.

Рассмотрим в пространстве д. с. к. $Oxyz$. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы координатных осей Ox , Oy и Oz соответственно, определяющие направление своих осей (рис. 3.14).

Очевидно, что векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют базис в пространстве; следовательно, всякий вектор пространства может быть разложен по этому базису.

Координаты вектора в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называются декартовыми координатами этого вектора.

Применим это разложение к вектору $\overrightarrow{OM}$, называемому **радиусом-вектором точки M** .

Если декартовы координаты точки M равны (x, y, z) , то мы имеем:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (3.6)$$

Таким образом, декартовы координаты точки M можно определить как координаты ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, связанном с исходной д. с. к.

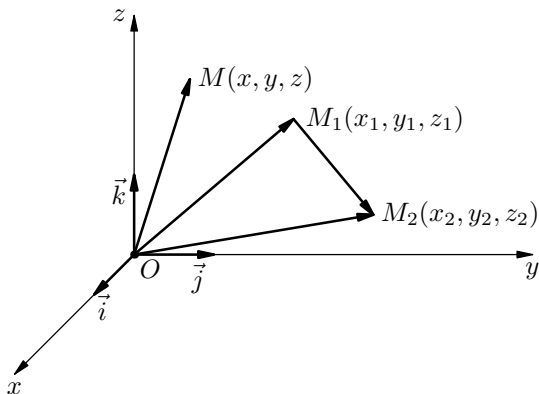


Рис. 3.14.

Это замечание позволяет находить декартовы координаты векторов, заданных своим началом и концом.

Пусть имеется вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ и известны декартовы координаты его начала $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и конца $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда декартовы координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}(a_1, a_2, a_3)$ равны разностям координат конца и начала: $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ и $a_3 = z_2 - z_1$.

Действительно, имеем векторное равенство:

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} \quad \text{или} \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}.$$

Утверждение доказано, так как координаты разности двух векторов равны разностям соответствующих координат векторов $\overrightarrow{OM_2}$ и $\overrightarrow{OM_1}$.

Поскольку длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ есть длина отрезка M_1M_2 , мы находим:

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Итак, если вектор $\vec{a}$ задан своими декартовыми координатами (a_1, a_2, a_3) , то его длина может быть найдена по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (3.7)$$

3.6. Угол между векторами. Скалярное произведение

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые векторы в пространстве. Приведем их к общему началу O : $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ (рис. 3.15).

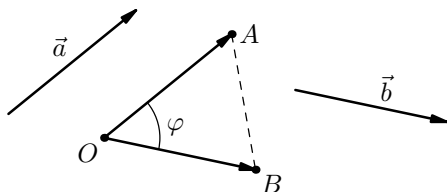


Рис. 3.15.

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ назовем угол φ при вершине O треугольника OAB . Ясно, что $0 \leq \varphi \leq \pi$. Иногда мы будем говорить об угле между направлениями векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Теперь обратимся к вопросу об умножении двух векторов. Желательно, чтобы операция умножения векторов подчинялась законам, отчасти аналогичным законам умножения чисел. Однако, такое требование не является самоцелью. Гораздо существеннее, чтобы определяемая операция отражала геометрические характеристики расположения двух векторов друг относительно друга.

Существуют две различные операции умножения двух векторов: векторы можно перемножать «скалярно» и «векторно».

Начнем со скалярного произведения, как наиболее простого и важнейшего.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы на плоскости или в пространстве.

Скалярным произведением $(\vec{a}, \vec{b})$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов и косинуса угла φ между их направлениями:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi. \quad (3.8)$$

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то мы полагаем их скалярное произведение равным нулю. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются при этом сомножителями скалярного произведения.

Пример 3.1. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ таковы, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, а угол между их направлениями равен 60° , то их скалярное произведение

равно 1: $(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 1$.

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на себя сокращенно именуется **скалярным квадратом вектора** $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$.

Таким образом, $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2$.

Выражение скалярного произведения векторов через координаты. Рассмотрим в пространстве д.с.к. $Oxyz$ и два вектора, заданные своими координатами: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$; $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$.

Пусть A и B — концы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенных от начала системы координат: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, и пусть φ — угол между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (рис. 3.15).

Согласно теореме косинусов

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB| \cos \varphi. \quad (3.9)$$

Однако:

$$|OA|^2 = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2; \quad |OB|^2 = |\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2;$$

$$|AB|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2;$$

$$|OA| \cdot |OB| \cdot \cos \varphi = (\vec{a}, \vec{b}).$$

Подставляя эти выражения в равенство (3.9), мы получаем:

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}).$$

Раскрыв скобки в левой части и проведя сокращения, мы приходим к искомому равенству:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \quad (3.10)$$

Итак, **скалярное произведение двух векторов, заданных своими декартовыми координатами, равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.**

Из формулы (3.10) мы сразу получаем способ нахождения косинуса угла φ между ненулевыми векторами $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (3.11)$$

Пример 3.2. Найдём угол α при вершине A треугольника ABC , где $A(-1, 3, 2)$, $B(3, 5, -2)$, $C(3, 3, -1)$.

Согласно формуле (3.11):

$$\cos \alpha = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|}.$$

Найдя координаты векторов $\overrightarrow{AB}(4, 2, -4)$ и $\overrightarrow{AC}(4, 0, -3)$ (см. § 3.5), получаем:

$$\cos \alpha = \frac{4 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + (-4) \cdot (-3)}{\sqrt{16 + 4 + 16} \cdot \sqrt{16 + 0 + 9}} = \frac{28}{30} \approx 0,93; \quad \alpha \approx 20^\circ 50'.$$

Формула (3.10) позволяет нам легко доказывать различные свойства скалярного произведения, среди которых важнейшими являются:

I. Скалярный квадрат вектора есть неотрицательное число. Равенство нулю скалярного квадрата вектора возможно лишь в том случае, когда этот вектор нулевой.

II. Из определения скалярного произведения сразу вытекает переместительный или коммутативный закон:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}). \quad (3.12)$$

III. Числовой множитель λ можно выносить за знак скалярного произведения:

$$(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b}). \quad (3.13)$$

IV. Для трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедливо дистрибутивное или распределительное свойство:

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}); \quad (\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}). \quad (3.14)$$

т.е. при скалярном умножении векторов «можно раскрывать скобки обычным образом».

Докажем четвертое свойство. Пусть векторы имеют декартовы координаты $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3), \vec{c}(c_1, c_2, c_3)$. Тогда $(\vec{a} + \vec{b})(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. Поэтому, согласно формуле (3.10),

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 = \\ &= a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}). \end{aligned}$$

Пример 3.3. Пусть $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — единичные векторы, угол между которыми равен 120° . Найдём угол φ между векторами $\vec{n}$ и $\vec{a} = 4\vec{m} - 3\vec{n}$.

По формуле (3.11):

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\vec{a}| \cdot 1} = \frac{(4\vec{m} - 3\vec{n}, \vec{n})}{\sqrt{(4\vec{m} - 3\vec{n}, 4\vec{m} - 3\vec{n})}} = \\ &= \frac{4(\vec{m}, \vec{n}) - 3(\vec{n}, \vec{n})}{\sqrt{16(\vec{m}, \vec{m}) - 24(\vec{m}, \vec{n}) + 9(\vec{n}, \vec{n})}}.\end{aligned}$$

Поскольку $(\vec{m}, \vec{n}) = |\vec{m}||\vec{n}| \cos 120^\circ = 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$; $(\vec{n}, \vec{n}) = (\vec{m}, \vec{m}) = 1$, находим, что $\cos \varphi = -\frac{5}{\sqrt{37}}$, т. е. $\varphi \approx 180^\circ - 34^\circ 40' = 145^\circ 20'$.

Пример 3.4. Раскроем скобки в выражениях:

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{a}) + (\vec{b}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) + 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b}).$$

$$(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) - (\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{b}, \vec{a}) + (\vec{b}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) - 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b}).$$

Почленно сложив эти два равенства, мы имеем:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2),$$

или

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2).$$

Мы получили **соотношение параллелограмма**: во всяком параллелограмме сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

3.7. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве даны вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось Ox . Рассмотрим плоскости, проходящие через точки A и B и перпендикулярные оси Ox . Пусть A' и B' — точки пересечения этих плоскостей с осью Ox , а $x_{A'}$ и $x_{B'}$ — их координаты на оси Ox .

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox называется число:

$$\text{пр}_{Ox} \overrightarrow{AB} = x_{B'} - x_{A'}. \quad (3.15)$$

Таким образом, проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox выражается числом, равным по абсолютной величине **длине** вектора $\overrightarrow{A'B'}$ и имеющим

знак плюс, если направления $\overrightarrow{A'B'}$ и Ox совпадают, и знак минус в противном случае.

Иногда мы будем говорить о проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на ненулевой вектор $\vec{b}$ (точнее, на его направление), подразумевая под этим проекцию на любую ось одного направления с вектором $\vec{b}$. В этом случае мы будем писать: $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Докажем, что **проекция вектора на ось равна произведению длины этого вектора на косинус угла φ между вектором и осью**:

$$\text{пр}_{Ox}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi. \quad (3.16)$$

Пусть сначала φ — острый угол (рис. 3.16) и $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AB}$. Тогда из

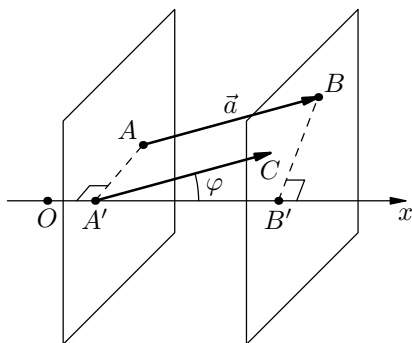


Рис. 3.16.

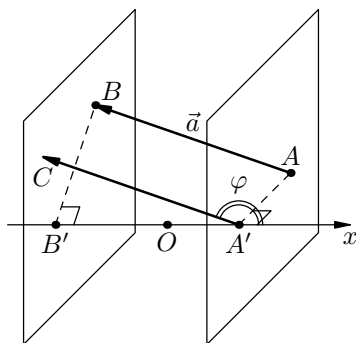


Рис. 3.17.

треугольника $A'B'C$ находим:

$$\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB} = |A'B'| = |A'C| \cos \varphi = |AB| \cos \varphi.$$

Если φ — тупой угол (рис. 3.17), то из треугольника $A'B'C$ найдем:

$$\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB} = -|A'B'| = -|A'C| \cos(\pi - \varphi) = |AB| \cos \varphi.$$

Равенство (3.16) доказано.

Рассмотрим два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$. Тогда

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos \varphi = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$$

и, следовательно,

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}. \quad (3.17)$$

Формула (3.17) дает нам возможность установить основные свойства проекции, воспользовавшись уже известными свойствами скалярного произведения.

Во-первых: проекция суммы векторов на направление вектора $\vec{b} \neq \vec{0}$ равна сумме проекций этих векторов на то же направление.

Во-вторых: при умножении вектора на число его проекция на направление умножается на это число.

Проверим первое свойство:

$$\begin{aligned} \text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) &= \frac{(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{(\vec{a}_1, \vec{b}) + (\vec{a}_2, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{(\vec{a}_1, \vec{b})}{|\vec{b}|} + \frac{(\vec{a}_2, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \\ &= \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}_1 + \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}_2. \end{aligned}$$

Наконец, если векторы заданы своими декартовыми координатами $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, то из формул (3.17) и (3.10) мы получаем важное соотношение, выражающее проекцию вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ через координаты этих векторов:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (3.18)$$

В заключение этой главы отметим, что вся теория скалярного произведения векторов в пространстве, которой мы занимались начиная с вывода формулы (3.7) в упрощенном виде справедлива и для векторов на плоскости. Так, для векторов $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$ декартовой плоскости Oxy мы имеем для длины вектора, скалярного произведения, угла между векторами и проекции вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ соответственно формулы:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad (3.7)'$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2, \quad (3.10)'$$

$$\cos \varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}, \quad \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \quad (3.11)'$$

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}, \quad \vec{b} \neq \vec{0}. \quad (3.18)'$$

Формулировки всех свойств скалярного произведения и проекций сохраняются. Подробности, вместе с очевидной переформулировкой определения проекции вектора на ось, оставляются читателю.

ГЛАВА 4. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

4.1. Ориентации плоскости и пространства

При рассмотрении декартовых систем координат на плоскости и в пространстве нами был опущен важный вопрос об их ориентации.

Начнем с плоскости, на которой выбрана д. с. к. Oxy .

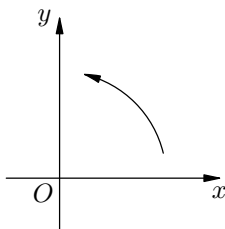


Рис. 4.1. Правая д. с. к.

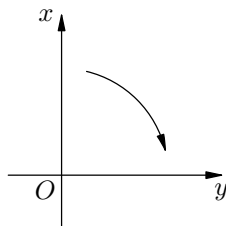


Рис. 4.2. Левая д. с. к.

Вращение плоскости мы будем считать положительным относительно выбранной д. с. к., если поворот плоскости на 90° в направлении этого вращения совмещает положительную полуось Ox с положительной полуосью Oy .

На рисунках 4.1 и 4.2 стрелкой изображены направления положительного вращения относительно введенных на плоскости д. с. к.

Если положительное вращение д. с. к. **происходит против часовой стрелки**, то д. с. к. Oxy называется **правой**, если же **по часовой стрелке**, то **левой**. Таким образом, на рис. 4.1 изображена правая д. с. к., а на рис. 4.2 — левая.

Выбирая на плоскости правую или левую д. с. к., мы задаем **ориентацию плоскости**¹. Не выходя из плоскости, невозможно с помощью движения перевести оси правой системы координат в соответствующие оси левой.

Пусть на плоскости выбрана правая или левая д. с. к. Рассмотрим упорядоченную пару неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к началу координат.

¹ Слова «ориентация» и «ориентировать» происходят от латинского oriens — «восток». Их первоначальный смысл — указание направления на восток.

Будем говорить, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют **правую пару векторов**, если кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется в направлении положительного вращения плоскости. В противном случае говорят, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют **левую пару**.

На рис. 4.3 и 4.4 в правой д. с. к. изображены соответственно правая и левая пары векторов $\vec{a}, \vec{b}$.

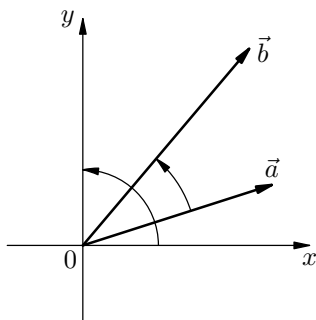


Рис. 4.3.

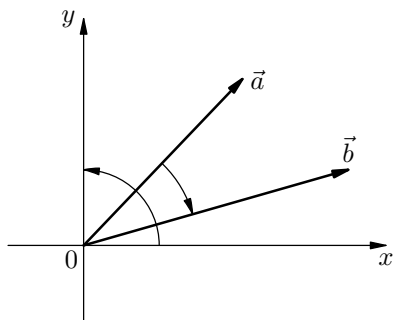


Рис. 4.4.

На рис. 4.5 и 4.6 в левой д. с. к. изображены соответственно правая и левая пары векторов $\vec{a}, \vec{b}$.

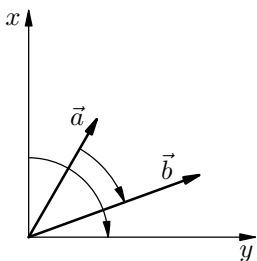


Рис. 4.5.

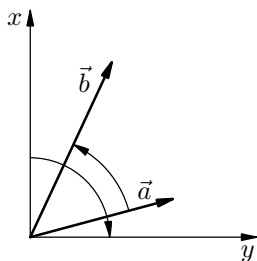


Рис. 4.6.

Ясно, что при фиксированной ориентации плоскости имеет место следующее свойство: если $\vec{a}, \vec{b}$ — правая пара векторов, то $\vec{b}, \vec{a}$ — левая пара векторов, и наоборот.

Подобную классификацию можно ввести и для пространственных систем координат.

Пусть $Oxyz$ — д. с. к. в пространстве. Если с точки зрения наблюдателя, находящегося на положительной полуоси Oz , система координат

нат на плоскости Oxy правая, то и пространственная система координат $Oxyz$ считается **правой**. В противном случае она — **левая**.

Две различные ориентации д. с. к. $Oxyz$ наглядно иллюстрируются с помощью **правого и левого винта** (рис. 4.7; 4.8).

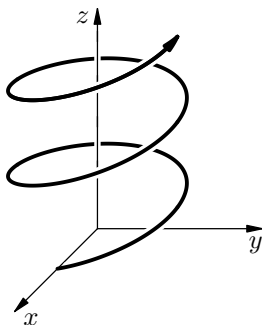


Рис. 4.7. Правый винт.

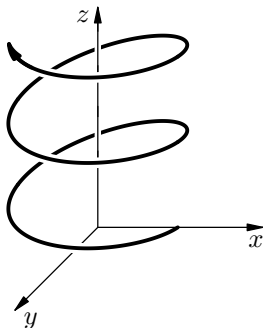


Рис. 4.8. Левый винт.

Будем вращать плоскость Oxy в положительном направлении и одновременно сообщим ей поступательное движение в положительном направлении оси Oz . Для правой системы координат результирующее движение будет движением правого винта, а для левой — левого.

Никакое движение пространства не может перевести оси правой д. с. к. в соответствующие оси левой д. с. к.

Выбирая в пространстве правую или левую д. с. к., мы задаем **ориентацию пространства**.

Фиксируем в пространстве д. с. к. $Oxyz$ и ее ориентацию. Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — упорядоченная тройка некопланарных векторов, приведенных к началу координат. Она называется **правой**, если имеет такую же ориентацию, как исходная д. с. к., и **левой** в противном случае.

Например, если исходная д. с. к. была правой (такая д. с. к. используется чаще всего), то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, если кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$, наблюдаемый с конца вектора $\vec{c}$, совершается против часовой стрелки. В противном случае тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в правой д. с. к. будет левой (рис. 4.9 и 4.10).

Легко проверяется следующее утверждение: если тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, то правыми являются также тройки векторов $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ и $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$.

Тройки векторов $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$; $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ и $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ являются при этом левыми.

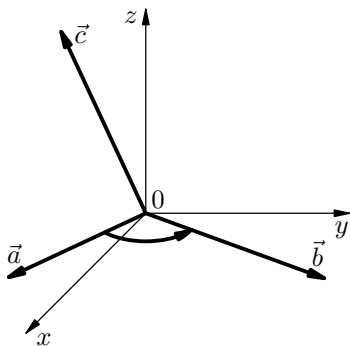


Рис. 4.9. Правая тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

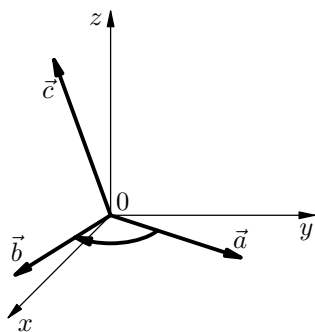


Рис. 4.10. Левая тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

4.2. Определители второго и третьего порядка

Рассмотрим задачу о нахождении площади параллелограмма и треугольника на плоскости. Поместим начало правой д.с.к. Oxy в одну из вершин параллелограмма. Пусть A и B — смежные с O вершины параллелограмма, а C — четвертая его вершина.

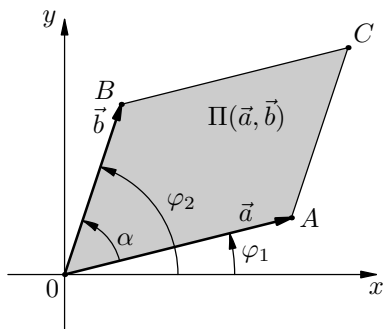


Рис. 4.11.

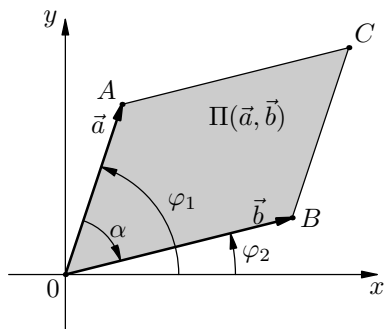


Рис. 4.12.

Таким образом, **параллелограмм $\Pi(\vec{a}, \vec{b})$ построен на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$** (рис. 4.11; 4.12).

Введем на плоскости полярные координаты $[\rho, \varphi]$ с полюсом O и полярной осью Ox . Тогда $[[\vec{a}], \varphi_1], [[\vec{b}], \varphi_2]$ — полярные координаты точек A и B . Угол α между полярными радиусами OA и OB положителен, если $\vec{a}, \vec{b}$ — правая пара векторов (рис. 4.11) и отрицателен, если эта пара векторов левая (рис. 4.12).

Площадь параллелограмма $S(\Pi(\vec{a}, \vec{b}))$ равна абсолютной величине выражения:

$$\begin{aligned}\bar{S}(\Pi(\vec{a}, \vec{b})) &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot (\sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2) = \\ &= |\vec{a}| \cdot \cos \varphi_1 \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi_2 - |\vec{b}| \cdot \cos \varphi_2 \cdot |\vec{a}| \cdot \sin \varphi_1 = \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Здесь $(a_1, a_2); (b_1, b_2)$ — координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно.

Заметим, что выражение $\bar{S}(\Pi(\vec{a}, \vec{b}))$ меняет знак при перемене местами векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Итак, можно сказать, что величина $\bar{S}(\Pi(\vec{a}, \vec{b}))$ представляет собой площадь параллелограмма со знаком, учитывающим ориентацию его сторон: если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ представляет собой вращение против часовой стрелки, то величина $\bar{S}(\Pi(\vec{a}, \vec{b}))$ совпадает с площадью параллелограмма $OABC$, и отличается от нее знаком в противном случае.

Поэтому число $\bar{S}(\Pi(\vec{a}, \vec{b}))$ называется ориентированной площадью параллелограмма $\Pi(\vec{a}, \vec{b})$, а выражение $a_1 b_2 - a_2 b_1$, равное ориентированной площади этого параллелограмма, записывают в символическом виде

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1\tag{4.2}$$

и называют определителем второго порядка¹.

Пример 4.1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - (1) \cdot (-3) = -7.$$

Пример 4.2.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 4.3. Пусть треугольник задан декартовыми координатами своих вершин: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$. Найдём площадь S_{ABC} треугольника ABC .

¹ Определители введены в науку Лейбницем (1678) и японским математиком Секи Кова Шинсуке (1642–1708)(1683).

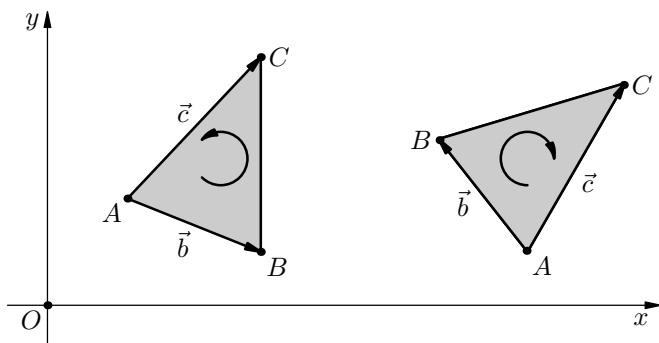


Рис. 4.13.

Ясно, что искомая площадь равна половине площади параллелограмма $S(\Pi(\vec{b}, \vec{c}))$, построенного на векторах $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Найдя координаты векторов $\vec{b}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ и $\vec{c}(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$, получаем, что

$$\pm S_{ABC} = \frac{1}{2} \bar{S}(\Pi(\vec{b}, \vec{c})) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

При этом величину, стоящую в правой части формулы (4.3) и обозначаемую $\bar{S}_{ABC}$, естественно назвать **ориентированной площадью треугольника**, т. к. она совпадает с S_{ABC} , если последовательный обход его вершин совершается против часовой стрелки. Если же этот обход совершается по часовой стрелке, то $\bar{S}_{ABC}$ есть площадь треугольника со знаком минус¹.

Из предыдущего вытекают следующие два замечания.

Во-первых, необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ является равенство нулю определителя второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.4)$$

Во-вторых, критерием принадлежности точек $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

¹ Формула площади треугольника по трем вершинам получена французским математиком Г. Монжем (1746–1818)(1809). Англичанин А. Кэли (1821–1895) придал этому выражению вид определителя (1843).

и $C(x_3, y_3)$ одной прямой является равенство нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.5)$$

Пример 4.4. Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1\lambda + b_1\mu = c_1 \\ a_2\lambda + b_2\mu = c_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

Здесь $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — заданные числа (коэффициенты нашей системы), λ и μ — подлежащие определению неизвестные.

Дадим геометрический способ решения системы (4.6).

Рассмотрим д. с. к. Oxy и три вектора $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$, $\vec{c}(c_1, c_2)$. Тогда систему (4.6) можно переписать в векторной форме:

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{c}. \quad (4.7)$$

Будем считать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Теперь задача нахождения решений системы (4.6) приобретает следующую геометрическую форму: найти координаты вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}$. Мы знаем, что эта задача имеет единственное решение.

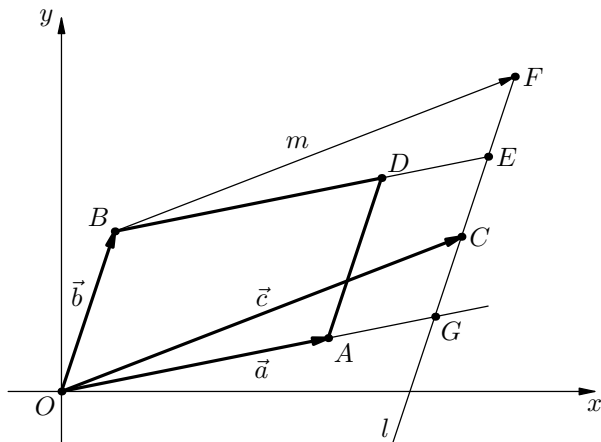


Рис. 4.14.

Пусть A, B, C, D — концы векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ соответственно, отложенных от начала д. с. к. (рис. 4.14).

Через точку C проведем прямую l , параллельную OB , а через точку B — прямую m , параллельную OC . Пусть F — точка пересечения прямых l и m , E — точка пересечения прямых BD и l , а G — точка пересечения прямых OA и l .

Заметим, что искомое λ находится из соотношения $\overrightarrow{OG} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$, которое, в свою очередь, дает соотношение между ориентированными площадями параллелограммов $OGEB$ и $OADB$:

$$\overline{S}(\Pi(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB})) = \lambda \cdot \overline{S}(\Pi(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})).$$

Однако, ориентированные площади параллелограммов $OGEB$ и $OCFB$ равны (т. к. $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{CF} = \vec{b}$): $\overline{S}(\Pi(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB})) = \overline{S}(\Pi(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}))$.

Получаем равенство $\overline{S}(\Pi(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})) = \lambda \overline{S}(\Pi(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}))$ или равносильное (в силу замечания, сделанного после примера 4.3) равенство:

$$\lambda = \frac{\overline{S}(\Pi(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}))}{\overline{S}(\Pi(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}))} = \frac{\overline{S}(\Pi(\vec{c}, \vec{b}))}{\overline{S}(\Pi(\vec{a}, \vec{b}))}.$$

Представляем ориентированные площади параллелограммов соответствующими определителями второго порядка и, воспользовавшись примером 4.2, получаем

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \quad (4.8)$$

Аналогично может быть найдено и неизвестное μ :

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \quad (4.9)$$

Итак, если в системе линейных уравнений (4.6) коэффициенты таковы, что $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, то эта система имеет единственное решение, которое дается формулами (4.8), (4.9). Они известны как **формулы Крамера**.

Наряду с определителями второго порядка рассмотрим определители третьего порядка и их свойства.

В следующем семестре будет построена теория определителей порядка n . Все устанавливаемые ниже свойства определителей третьего

порядка при надлежащей формулировке справедливы и в общей теории. Поэтому нижеследующее можно рассматривать как теорию определителей «в миниатюре».

Определитель третьего порядка есть выражение

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \quad (4.10)$$

$$= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3.$$

При этом, числа $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ называются **элементами** определителя, горизонтальные ряды (например, a_1, b_1, c_1) — **строками** определителя, а вертикальные ряды (например, a_1, a_2, a_3) — его **столбцами**.

Заметим, что в равенствах (4.10) первое равенство сводит определение определителя третьего порядка к определителям второго порядка.

Второе равенство написано после применения (4.2), раскрытия скобок и перегруппировки слагаемых.

Для запоминания выражения, стоящего последним в равенствах (4.10), можно использовать следующее правило:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & \\ & & a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ (-) & (-) & (-) & (+) & (+) & (+) & \end{array}$$

После правого столбца таблицы, задающей определитель, надо снова выписать два его первых столбца и рассмотреть произведения элементов, стоящих на каждой из шести выделенных диагоналей. При этом произведения элементов, стоящих на диагоналях, которые выделены сплошными линиями, входят в определитель со знаком плюс, а произведения элементов, отвечающих диагоналям, выделенным штриховыми линиями, входят в определитель со знаком минус.

Установим теперь важнейшие свойства определителей.

1. Если в определителе заменить строки столбцами с соответствующими номерами, а столбцы строками, то определитель не изменится

(ср. с примером 4.2):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Это свойство проверяется непосредственным сравнением выражений, стоящих в обеих частях равенства.

2. При перемени местами двух строк определитель меняет знак. Например:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

Из свойства 2 немедленно вытекает, что определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.

3. Первое из равенств (4.10) называют **разложением определителя по первой строке**. Имеют место аналогичные разложения определителя по второй и третьей строкам, которые выглядят соответственно так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

4. Общий множитель элементов одной строки определителя можно выносить за знак определителя. Например:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & \lambda b_3 & \lambda c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что определитель, имеющий строку, составленную из нулей, сам равен нулю.

5. Если в определителе все элементы строки с номером k ($k = 1, 2, 3$) представляют собой сумму двух слагаемых, то он равен сумме двух определителей, в первом из которых в качестве элементов k -й строки взяты первые слагаемые, а во втором — вторые. Например:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 + a''_2 & b'_2 + b''_2 & c'_2 + c''_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a''_2 & b''_2 & c''_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

6. Если к элементам одной строки определителя добавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится. Например:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \lambda a_1 & b_3 + \lambda b_1 & c_3 + \lambda c_1 \end{vmatrix}.$$

Заметим, во-первых, что в силу свойства 1 все свойства определителей 2–6, приведенные здесь для строк, справедливы и для столбцов.

Во-вторых, для определителей третьего порядка справедливость всех свойств может быть установлена непосредственным вычислением обеих частей равенств 1–6 по определению (4.10).

Пример 4.5. Воспользовавшись определением (4.10), имеем:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3.$$

Пример 4.6.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Здесь сначала к элементами первой строки определителя мы прибавили соответствующие элементы второй и третьей строк (свойство 6).

Затем, общий множитель элементов первой строки вынесли за знак определителя (свойство 4). Вычтя из элементов второй и третьей строк соответствующие элементы первой строки, получили определитель вида, рассмотренного в примере 4.5.

Пример 4.7. Покажем, что ориентированная площадь треугольника, заданного координатами своих вершин $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ на плоскости, дается определителем третьего порядка:

$$\bar{S}_{ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Действительно:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Здесь в исходном определителе мы сначала поменяли местами первую и вторую строки, в полученном определителе поменяли местами вторую и третью строки, вычли из первой и второй строк соответствующие элементы третьей строки и, наконец, воспользовались разложением определителя по последнему столбцу.

Чтобы убедиться в справедливости доказываемой формулы, теперь достаточно вспомнить пример 4.3.

Теперь мы возвращаемся к изучению векторной алгебры.

4.3. Векторное произведение

До конца этой главы мы будем считать пространство ориентированным, т.е. фиксируем в нем декартову систему координат $Oxyz$, для определенности правую¹. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два ненулевых вектора в пространстве. Их векторным произведением называется вектор $\vec{c}$, который определяется следующими условиями:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая. Таким образом, $\vec{c} = \vec{0}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. В противном случае $|\vec{c}|$ есть площадь параллелограмма $\Pi(\vec{a}, \vec{b})$, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В случае, если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, их векторное произведение — вектор $\vec{c}$ — считается нулевым вектором.

Для векторного произведения примем обозначение $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$; $\vec{a}, \vec{b}$ — **сомножители** векторного произведения².

Пример 4.8. Для единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ декартовых осей Ox, Oy и Oz (рис. 4.16) имеем следующую «таблицу умножения»:

¹ Различение правой и левой систем координат введено О.Л.Коши (1789–1857)(1826) под влиянием французского физика А.М.Ампера (1775–1836) и французского механика Г.Г.Кориолиса (1792–1843). Закон Ампера движения проводника с электрическим током в магнитном поле и ускорение Кориолиса теперь излагаются с помощью векторного произведения.

² Векторное произведение было определено Гамильтоном как векторная часть т.н. кватернионного произведения. Оно было определено также Грассманом. Гиббс называл его «косым произведением» в противоположность «прямому», т.е. скалярному.

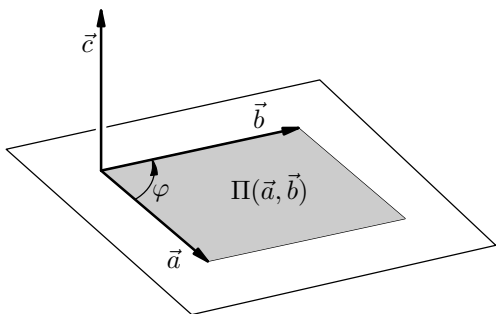


Рис. 4.15.

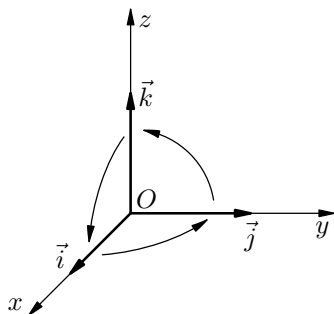


Рис. 4.16.

$$\begin{aligned} [\vec{i}, \vec{i}] &= [\vec{j}, \vec{j}] = [\vec{k}, \vec{k}] = \vec{0}. \\ [\vec{i}, \vec{j}] &= -[\vec{j}, \vec{i}] = \vec{k}. \\ [\vec{j}, \vec{k}] &= -[\vec{k}, \vec{j}] = \vec{i}. \\ [\vec{k}, \vec{i}] &= -[\vec{i}, \vec{k}] = \vec{j}. \end{aligned}$$

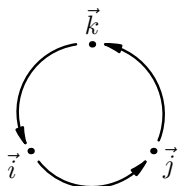


Рис. 4.17.

Для запоминания этой таблицы пользуются следующим «круговым правилом».

На окружности, проходимой против часовой стрелки, отметим три точки, которые последовательно, как указывает направление обхода, обозначим как орты координатных осей: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис. 4.17). Тогда векторное произведение двух разноименных ортов, если они следуют друг за другом в выбранном направлении обхода окружности, равно третьему орту со знаком плюс, в противоположном случае — со знаком минус.

Рассмотрим в плоскости π многоугольник M площади $S(M)$. Пусть π_1 — другая плоскость и M_1 — проекция многоугольника M на плоскость π_1 , и пусть $S(M_1)$ — площадь проекции.

Известно, что $S(M_1) = S(M) \cos \alpha$, где α — угол между плоскостями π и π_1 . (Углом между двумя плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образующихся при их пересечении.)

Это утверждение из курса элементарной геометрии потребуется нам для решения задачи о выражении координат векторного произведения через координаты сомножителей.

Итак, пусть заданы векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ в декар-

товой системе координат $Oxyz$. Требуется найти координаты c_1, c_2, c_3 вектора $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

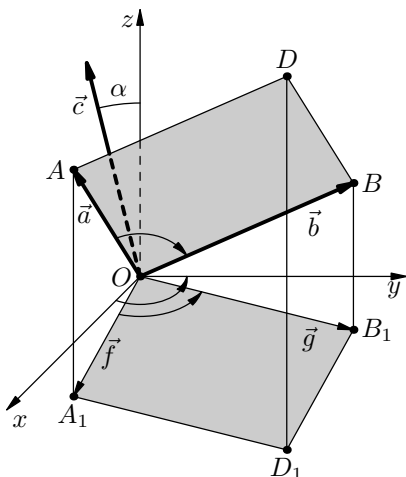


Рис. 4.18.

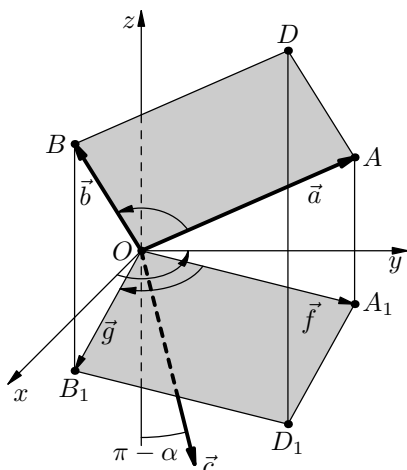


Рис. 4.19.

Определим координату c_3 . Обозначим буквами A, B, D концы векторов $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, отложенных от начала координат O . A_1, B_1, D_1 — проекции точек A, B, D на координатную плоскость Oxy . Обозначим векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ через $\vec{f}$ и $\vec{g}$. Тогда (a_1, a_2) и (b_1, b_2) — координаты соответственно векторов $\vec{f}$ и $\vec{g}$, рассматриваемых как векторы плоскости Oxy .

Наконец пусть α — угол между вектором $\vec{c}$ и осью Oz . Тогда

$$c_3 = |\vec{c}| \cos \alpha = S(\Pi(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})) \cos \alpha,$$

где $S(\Pi(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}))$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

Если $c_3 > 0$, т.е. $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то угол между плоскостью параллелограмма $OADB$ и координатной плоскостью Oxy тоже равен α , а $\vec{f}, \vec{g}$ — правая пара векторов на плоскости Oxy (рис. 4.18).

Поэтому

$$c_3 = S(\Pi(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})) \cos \alpha = S(\Pi(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1})) = \bar{S}(\Pi(\vec{f}, \vec{g})) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

где $\bar{S}(\Pi(\vec{f}, \vec{g}))$ — ориентированная площадь параллелограмма $OA_1D_1B_1$, построенного на векторах $\vec{f}$ и $\vec{g}$.

Если $c_3 < 0$, т.е. $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то угол между плоскостью параллелограмма $OADB$ и координатной плоскостью Oxy равен $(\pi - \alpha)$, а $\vec{f}, \vec{g}$ — левая пара векторов на плоскости Oxy (рис. 4.19).

Поэтому

$$\begin{aligned} c_3 &= S(\Pi(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})) \cos \alpha = -S(\Pi(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})) \cos(\pi - \alpha) = \\ &= -S(\Pi(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1})) = \bar{S}(\Pi(\vec{f}, \vec{g})) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Во всех случаях имеем: $c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Аналогично устанавливается, что

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 b_3 - b_3 a_2$$

и

$$c_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = a_3 b_1 - a_1 b_3.$$

Можно подвести итог: **вектор $\vec{c}$, являющийся векторным произведением векторов $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ и $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$, равен**

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (4.11)$$

Для запоминания формулу (4.11) записывают короче:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad (4.12)$$

считая, что правая часть формулы (4.11) формально получена из правой части формулы (4.12) по правилу разложения определителя по первой строке.

Теперь, с учетом известных свойств определителей, без труда устанавливаются основные свойства векторного произведения.

Во-первых, при перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}];$$

это следует из второго свойства определителей.

Во-вторых, если один из сомножителей векторного произведения является произведением вектора на число, то это число можно выносить за знак векторного произведения:

$$[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda \vec{b}];$$

это следует из четвертого свойства определителей.

В-третьих, имеет место свойство **дистрибутивности** (распределительности) **векторного произведения**, выражаемое равенствами

$$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}], \quad [\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}],$$

которые следуют из пятого свойства определителей.

С помощью векторного произведения удобно формулируется критерий коллинеарности двух векторов.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые векторы, φ — угол между ними. Тогда $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\sin\varphi = 0$ и, следовательно, $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$. Обратно, если $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$, то $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = 0$, т. е. $\sin\varphi = 0$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

Эти замечания дают нам право сделать следующий вывод: **для того, чтобы два вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нулевому вектору, т.е. координаты векторов удовлетворяли соотношениям:**

$$a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_3 - a_3b_1 = a_2b_3 - a_3b_2 = 0.$$

Пример 4.9. Площадь параллелограмма $\Pi(\vec{a}, \vec{b})$, построенного на векторах $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, отложенных от одной точки, как это следует из определения векторного произведения и формулы (4.11), равна

$$S(\Pi(\vec{a}, \vec{b})) = ||[\vec{a}, \vec{b}]|| = \sqrt{\left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right|^2}.$$

Например, если $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}.$$

Отсюда

$$S(\Pi(\vec{a}, \vec{b})) = \sqrt{(4)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26}.$$

Пример 4.10. Площадь S_{ABC} треугольника с вершинами в точках $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и $\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ и, следовательно, равна

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right|.$$

Например, если даны координаты вершин: $A(-1, 2, 3)$, $B(2, 1, 4)$, $C(0, -3, 4)$, то $\overrightarrow{AB}(3, -1, 1)$ и $\overrightarrow{AC}(1, -5, 1)$. Тогда

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 14\vec{k};$$

$$S(\Pi(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})) = \sqrt{16 + 4 + 196} = 6\sqrt{6}.$$

Следовательно, $S_{ABC} = \frac{1}{2} S(\Pi(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})) = 3\sqrt{6}$.

Пример 4.11. Если прямая l проходит через точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то расстояние ρ от третьей точки $C(x_3, y_3, z_3)$ до прямой l равно длине высоты параллелограмма $\Pi(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, опущенной из точки C на сторону AB . Отсюда заключаем, что

$$\rho = \frac{|\overrightarrow{[AB, AC]}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

Например, если точки A , B и C такие же, как в примере 4.10, то $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{11}$. Следовательно, расстояние ρ от точки C до прямой AB равно $\rho = 6\sqrt{6}/11$.

Пример 4.12. Докажем, что для любых трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справедливо соотношение:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}). \quad (4.13)$$

Здесь числовые множители записаны справа от соответствующих векторов для легкого запоминания правой части формулы: «бац минус цаб».

Выберем в пространстве правую д. с. к. так, чтобы вектор $\vec{c}$ был коллинеарен первой координатной оси, а векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны первой координатной плоскости. Теперь координаты векторов имеют вид:

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3); \quad \vec{b}(b_1, b_2, 0); \quad \vec{c}(c_1, 0, 0).$$

Тогда вектор $[\vec{b}, \vec{c}]$ имеет координаты $(0, 0, -b_2c_1)$, а вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ — координаты $(-a_2b_2c_1, a_1b_2c_1, 0)$ (проведите вычисления с помощью формулы (4.11) или (4.12)).

С другой стороны, $(\vec{a}, \vec{c}) = a_1c_1$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$. Следовательно, векторы $\vec{b}(\vec{a}, \vec{c})$ и $\vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$ имеют соответственно координаты $(a_1b_1c_1, a_1b_2c_1, 0)$ и $(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1, 0, 0)$.

Окончательно получаем, что вектор $\vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$ имеет координаты $(-a_2b_2c_1, a_1b_2c_1, 0)$, такие же, как вектор $[\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]]$.

4.4. Смешанное произведение

Для трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с помощью операций скалярного и векторного умножения можно составить три различных типа произведений.

Во-первых, умножив вектор $\vec{c}$ на скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b})$ первых двух векторов, мы получим вектор $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c}$, который называется **простейшим произведением трех векторов**. Простейшее произведение трех векторов может быть определено также на прямой или на плоскости и не связано с ориентацией.

Во-вторых, можно перемножить два вектора, например $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторно, и векторно умножить вектор $\vec{a}$ на результат. Получим вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$, который называется **двойным векторным произведением** (или **векторно-векторным произведением**) трех векторов. Пример 4.12 показывает, что двойное векторное произведение выражается через простейшие.

Наконец, можно перемножить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторно и полученный вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ скалярно умножить на третий вектор $\vec{c}$. В результате получится число, обозначаемое $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, которое называется **смешанным (векторно-скалярным) произведением трех векторов**.

Итак, определено **смешанное произведение трех векторов**:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}). \quad (4.14)$$

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются **сомножителями** смешанного произведения.

Ниже мы увидим, что смешанное произведение является удобным средством для вычисления объемов, подобно тому, как скалярное произведение помогает вычислять длины и углы, а векторное произведение — площади.

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы своими декартовыми координатами:

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3); \quad \vec{b}(b_1, b_2, b_3); \quad \vec{c}(c_1, c_2, c_3).$$

Найдем значение смешанного произведения $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Уже известно, что

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Тогда скалярное произведение $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ равно:

$$c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Последнее равенство есть разложение определителя третьего порядка по первой строке. Наконец, воспользовавшись тем, что при перемени строк местами определитель меняет знак, получаем:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Окончательно,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (4.15)$$

Теперь уже известные свойства определителя третьего порядка позволяют нам сделать заключение о свойствах смешанного произведения векторов.

Во-первых, при перемени местами двух сомножителей смешанное произведение меняет знак, и для произвольных трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ мы имеем равенства:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}).$$

(Следует из второго свойства определителей.)

Во-вторых, числовой множитель можно выносить за знак смешанного произведения:

$$(\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \lambda \vec{c}).$$

(Следует из четвертого свойства определителей.)

В-третьих, для любых векторов $\vec{a}, \vec{a}_1, \vec{b}, \vec{b}_1, \vec{c}, \vec{c}_1$ справедливы равенства:

$$(\vec{a} + \vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c});$$

$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{b}_1, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{c});$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{c}_1) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1).$$

(Следует из пятого свойства определителей.)

Перейдем к выяснению геометрического смысла смешанного произведения. Решив эту задачу, мы обнаружим и геометрическую интерпретацию определителя третьего порядка.

Обозначим через $\Pi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ параллелепипед, построенный на отложенных от одной точки векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, и через $V(\Pi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$ — его объем.

Пусть векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ и $\vec{OC} = \vec{c}$ некопланарны и образуют правую тройку (рис. 4.20).

Тогда вектор $\vec{d} = [\vec{a}, \vec{b}]$ будет направлен в ту же сторону от плоскости $OABD$, что и вектор $\vec{c}$. Объем параллелепипеда $\Pi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ находится по известной формуле: $V(\Pi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})) = S(\Pi(\vec{a}, \vec{b})) \cdot h$, где h — высота параллелепипеда, а $S(\Pi(\vec{a}, \vec{b}))$ — площадь его основания. Но $S_{OADB} = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{d}|$ и $h = |OE| = \text{пр}_{\vec{d}} \vec{c}$. Подставив эти выражения в формулу для объема параллелепипеда, получаем:

$$V(\Pi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})) = |\vec{d}| \cdot \text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = (\vec{d}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую тройку, то все рассуждения сохраняются с той лишь разницей, что значение $\text{пр}_{\vec{d}} \vec{c}$ будет отрицательным, т. е. будем иметь равенство $h = -\text{пр}_{\vec{d}} \vec{c}$.

Мы установили, таким образом, что **смешанное произведение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ есть объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, «со знаком»** (ориентированный объем параллелепипеда): **для правой тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ смешанное произведение этих векторов равно объему параллелепипеда**

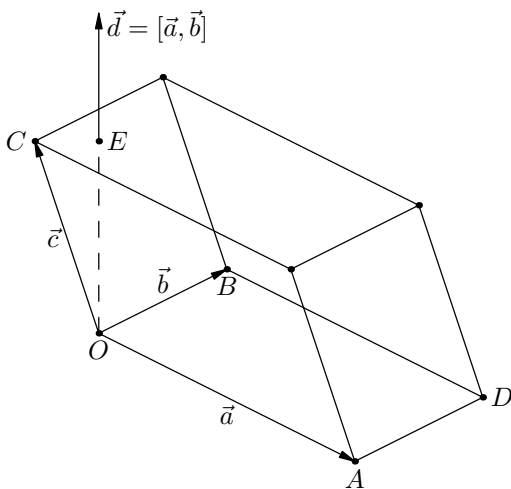


Рис. 4.20.

$\Pi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$; для левой тройки векторов их смешанное произведение отрицательно, но по абсолютной величине равно объему того же параллелепипеда.

Отсюда, чтобы интерпретировать величину определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

«геометрически», надо в д. с. к. построить параллелепипед на векторах $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ и найти его ориентированный объем.

Установим критерий компланарности векторов.

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Это означает, что или 1) два вектора коллинеарны, например, $\vec{a} \parallel \vec{b}$, и тогда $\vec{d} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$, или 2) вектор $\vec{c}$ параллелен плоскости, построенной на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и тогда $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = 0$, т. к. вектор $\vec{d} = [\vec{a}, \vec{b}]$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$.

Обратно, так как $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |[\vec{a}, \vec{b}]| \text{pr}_{\vec{d}} \vec{c} = 0$ ($\vec{d} = [\vec{a}, \vec{b}]$), то или 1) $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ и $\vec{a} \parallel \vec{b}$; или 2) $\text{pr}_{\vec{d}} \vec{c} = 0$ и вектор $\vec{c}$ параллелен плоскости, построенной на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В обоих случаях векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

компланарны.

Итак, необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения.

Заметим, что, возвращаясь к представлению смешанного произведения векторов с помощью определителя третьего порядка, последнее утверждение можно выразить следующим образом: определитель третьего порядка равен нулю тогда и только тогда, когда одна из строк определителя является линейной комбинацией двух других его строк.

Пример 4.13. Пусть тетраэдр задан координатами его вершин: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$. Найдем объем этого тетраэдра.

Объем тетраэдра равен одной шестой части объема параллелепипеда, построенного на трех его ребрах, исходящих из одной вершины.

Следовательно,

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} V(\Pi(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})) = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \right|.$$

Поскольку $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, $\overrightarrow{AD}(x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$, получаем:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \text{abs} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix},$$

где выражение $\text{abs } x$ означает абсолютную величину числа x .

Например, если вершины тетраэдра имеют координаты: $A(0, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$, $C(3, 0, 4)$, $D(0, 4, 5)$, то

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \left| (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \right| = \frac{1}{6} \cdot \text{abs} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \text{abs}(-77) = \frac{77}{6}.$$

Пример 4.14. Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — три некопланарных вектора, которые, как известно, задают базис в пространстве, по которому может быть однозначно разложен любой вектор $\vec{d}$:

$$\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}.$$

Найдем числа λ, μ и ν — координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Для этого, скалярно умножив обе части разложения последовательно

на векторы $[\vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{c}, \vec{a}]$ и $[\vec{a}, \vec{b}]$, получаем равенства: $(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$; $(\vec{d}, \vec{c}, \vec{a}) = \mu(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$; $(\vec{d}, \vec{a}, \vec{b}) = \nu(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$.

Отсюда находим:

$$\lambda = \frac{(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}; \quad \mu = \frac{(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}; \quad \nu = \frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}.$$

Читателю предлагается самостоятельно сравнить этот пример с примером 4.4 и получить формулы Крамера для решения системы трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными.

Пример 4.15. Покажем, что площадь параллелограмма $\Pi(\vec{a}, \vec{b})$, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, может быть найдена вычислением только попарных скалярных произведений этих векторов и составленного из них определителя второго порядка.

Рассмотрим четыре вектора $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{s}$ и скалярное произведение $([\vec{p}, \vec{q}], [\vec{r}, \vec{s}])$ векторных произведений $[\vec{p}, \vec{q}]$ и $[\vec{r}, \vec{s}]$. Это скалярное произведение можно рассматривать как смешанное произведение трех векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $[\vec{r}, \vec{s}]$. Тогда из свойств смешанного произведения и его определения мы получаем равенства:

$$([\vec{p}, \vec{q}], [\vec{r}, \vec{s}]) = (\vec{p}, \vec{q}, [\vec{r}, \vec{s}]) = (\vec{q}, [\vec{r}, \vec{s}], \vec{p}) = ([\vec{q}, [\vec{r}, \vec{s}]], \vec{p}).$$

Двойное векторное произведение $[\vec{q}, [\vec{r}, \vec{s}]]$ согласно примеру 4.12 есть вектор $\vec{r}(\vec{q}, \vec{s}) - \vec{s}(\vec{q}, \vec{r})$. Поэтому

$$([\vec{p}, \vec{q}], [\vec{r}, \vec{s}]) = (\vec{p}, \vec{r})(\vec{q}, \vec{s}) - (\vec{p}, \vec{s})(\vec{q}, \vec{r}) = \begin{vmatrix} (\vec{p}, \vec{r}) & (\vec{p}, \vec{s}) \\ (\vec{q}, \vec{r}) & (\vec{q}, \vec{s}) \end{vmatrix}. \quad (4.16)$$

Равенство (4.16) называется **тождеством Лагранжа** и является одним из важнейших в векторной алгебре.

Теперь положим $\vec{a} = \vec{p} = \vec{r}$ и $\vec{b} = \vec{q} = \vec{s}$. Тогда тождество Лагранжа превращается в равенство

$$[\vec{a}, \vec{b}]^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & \vec{b}^2 \end{vmatrix}, \quad (4.17)$$

которое означает, что

$$S(\Pi(\vec{a}, \vec{b})) = \sqrt{[\vec{a}, \vec{b}]^2} = \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2},$$

т. е. площадь параллелограмма $\Pi(a, b)$ может быть найдена только вычислением скалярных произведений и определителя второго порядка.

Заметим, что равенство (4.17) может быть выведено непосредственно из определений скалярного и векторного произведений. Мы предпочли окольный путь, чтобы познакомиться с тождеством Лагранжа.

Пример 4.16. Покажем, что объем параллелепипеда $\Pi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, может быть найден вычислением только попарных скалярных произведений этих векторов и составленного из них определителя третьего порядка.

Равенство (4.17) потребуется нам теперь в таком виде:

$$(\vec{p}, \vec{q})^2 = \vec{p}^2 \cdot \vec{q}^2 - [\vec{p}, \vec{q}]^2. \quad (4.18)$$

Рассмотрим квадрат смешанного произведения трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})^2.$$

Заменяя в равенстве (4.18) вектор $\vec{p}$ вектором $[\vec{a}, \vec{b}]$, а вектор $\vec{q}$ вектором $\vec{c}$, получаем:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})^2 = [\vec{a}, \vec{b}]^2 \cdot \vec{c}^2 - [[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}]^2. \quad (4.19)$$

Согласно (4.17), $[\vec{a}, \vec{b}]^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2$ и, следовательно,

$$[\vec{a}, \vec{b}]^2 \cdot \vec{c}^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 \cdot \vec{c}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2 \cdot \vec{c}^2. \quad (4.20)$$

Далее,

$$\begin{aligned} [[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}]^2 &= [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]]^2 = (\vec{a}(\vec{c}, \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}))^2 = \\ &= \vec{a}^2(\vec{b}, \vec{c})^2 + \vec{b}^2(\vec{a}, \vec{c})^2 - 2(\vec{a}, \vec{b})(\vec{a}, \vec{c})(\vec{c}, \vec{b}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Подставляя (4.20) и (4.21) в (4.19), имеем:

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 &= \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 \cdot \vec{c}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2 \cdot \vec{c}^2 - \vec{a}^2 \cdot (\vec{c}, \vec{b})^2 - \vec{b}^2(\vec{a}, \vec{c})^2 + 2(\vec{a}, \vec{b})(\vec{a}, \vec{c})(\vec{c}, \vec{b}) = \\ &= \vec{a}^2 \left(\vec{b}^2 \cdot \vec{c}^2 - (\vec{b}, \vec{c})^2 \right) - (\vec{a}, \vec{b}) \left((\vec{a}, \vec{b})\vec{c}^2 - (\vec{a}, \vec{c})(\vec{c}, \vec{b}) \right) + \\ &\quad + (\vec{a}, \vec{c}) \left((\vec{a}, \vec{b})(\vec{c}, \vec{b}) - (\vec{a}, \vec{c})\vec{b}^2 \right) = \\ &= \vec{a}^2 \begin{vmatrix} \vec{b}^2 & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{b}, \vec{c}) & \vec{c}^2 \end{vmatrix} - (\vec{a}, \vec{b}) \begin{vmatrix} (\vec{b}, \vec{a}) & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{c}, \vec{a}) & \vec{c}^2 \end{vmatrix} + (\vec{a}, \vec{c}) \begin{vmatrix} (\vec{b}, \vec{a}) & \vec{b}^2 \\ (\vec{c}, \vec{a}) & (\vec{c}, \vec{b}) \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & \vec{b}^2 & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{c}, \vec{a}) & (\vec{c}, \vec{b}) & \vec{c}^2 \end{vmatrix}.$$

Поскольку объем параллелепипеда $\Pi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ равен $\left| (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2}$, мы окончательно получаем формулу:

$$V^2(\Pi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})) = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & \vec{b}^2 & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{c}, \vec{a}) & (\vec{c}, \vec{b}) & \vec{c}^2 \end{vmatrix}, \quad (4.22)$$

что и доказывает высказанное утверждение.

В заключение этой главы отметим, что примеры 4.12, 4.15 и 4.16 показывают, что в известном смысле все вычисления векторной алгебры сводятся к вычислению скалярных произведений векторов и определителей, составленных из скалярных произведений.

Именно это обстоятельство позволило нам в главе 3 назвать скалярное произведение важнейшей среди операций умножения векторов.

ГЛАВА 5. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

5.1. Общее уравнение прямой на плоскости

Мы начнем изучение прямой на плоскости, установив вид уравнения, задающего прямую линию в д. с. к.

Покажем, что всякая прямая на декартовой плоскости Oxy задается уравнением вида

$$Ax + By + C = 0, \quad (5.1)$$

где A, B, C — постоянные и $A^2 + B^2 \neq 0$. Уравнение (5.1) называется **общим уравнением прямой** на плоскости¹.

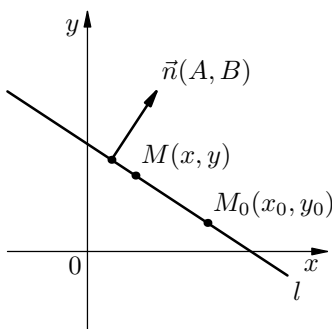


Рис. 5.1.

Пусть l — произвольная прямая на плоскости. Зафиксируем точку $M_0(x_0, y_0)$ на этой прямой и $\vec{n}(A, B)$ — произвольный **нормальный вектор**² к l , т. е. ненулевой вектор, перпендикулярный прямой l (рис. 5.1).

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка прямой l . Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, что означает равенство нулю их скалярного произведения: $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$. Записывая скалярное произведение с помощью декартовых координат векторов, имеем:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (5.2)$$

¹ То, что уравнения первой степени задают на плоскости прямые, а второй — конические сечения, установил первым П. Ферма.

² Термины «нормальный вектор» и «нормаль» происходят от латинского слова *normalis* — «выполненный по угольнику» (*norma* — «образец, угольник»).

Итак, координаты каждой точки $M(x, y)$, принадлежащей прямой l , удовлетворяют уравнению (5.2), которое называется **уравнением прямой по точке и нормали**. После раскрытия скобок и перестановки слагаемых это уравнение принимает вид (5.1):

$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0,$$

достаточно положить $C = -Ax_0 - By_0$.

Обратно, если точка $M(x, y)$ такова, что ее координаты удовлетворяют уравнению (5.2), то для скалярного произведения векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ имеем: $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$. Последнее означает принадлежность точки $M(x, y)$ прямой l .

Итак, доказано, что уравнение (5.2), которое равносильно (5.1), есть уравнение прямой l .

Теперь убедимся, что **всякое уравнение вида (5.1) определяет прямую на плоскости при условии, что $A^2 + B^2 \neq 0$** .

Пусть (x_0, y_0) — какое-нибудь решение этого уравнения:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Тогда $C = -Ax_0 - By_0$ и уравнение (5.1) можно преобразовать так:

$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0 \quad \text{или} \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

В таком виде, как было установлено, оно представляет собой уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с нормальным вектором $\vec{n}(A, B)$. Утверждение доказано.

Заметим, что в процессе доказательства мы установили, что **коэффициенты A и B в общем уравнении прямой (5.1) имеют простой геометрический смысл: это координаты вектора, нормального к данной прямой**.

5.2. Особенности расположения прямой относительно системы координат

Здесь мы выясняем особенности в расположении прямой относительно д. с. к., если задающее ее уравнение

$$Ax + By + C = 0$$

имеет тот или иной частный вид.

1. $A = 0$. В этом случае уравнение прямой $By + C = 0$ можно переписать так:

$$y = -\frac{C}{B}.$$

Все точки такой прямой имеют одну и ту же ординату, и, следовательно, прямая параллельна оси Ox (рис. 5.2). Она совпадает с ней, если $C = 0$.

2. $B = 0$. Рассуждая аналогично, имеем: прямая параллельна оси Oy (рис. 5.3) и совпадает с ней, если $C = 0$.

3. $C = 0$. Прямая проходит через начало координат, так как его координаты $(0, 0)$ удовлетворяют уравнению (рис. 5.4).

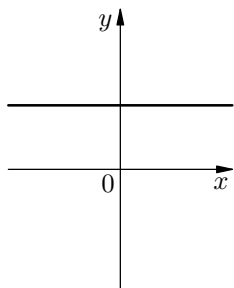


Рис. 5.2.

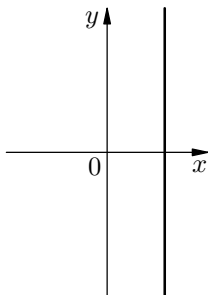


Рис. 5.3.

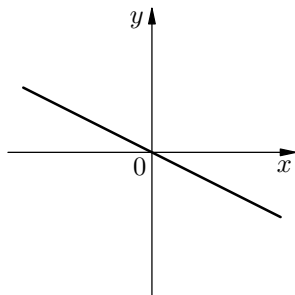


Рис. 5.4.

5.3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть в уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ коэффициент B отличен от нуля. Тогда это уравнение можно разрешить относительно y . Получаем:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обозначив $-A/B = k$, $-C/B = b$, имеем:

$$y = kx + b. \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом**. Выясним геометрический смысл углового коэффициента k .

Рассмотрим на прямой две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ такие, что $x_1 < x_2$. Так как их координаты удовлетворяют уравнению прямой, имеем равенства:

$$y_1 = kx_1 + b, \quad y_2 = kx_2 + b.$$

Вычитая эти равенства почленно, находим k :

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Легко видеть, что $k = \operatorname{tg} \alpha$, где угол α определяется, как показано на рис. 5.5 и 5.6, в зависимости от знака k .

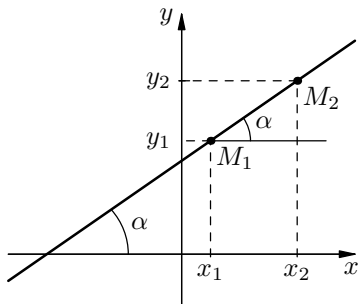


Рис. 5.5.

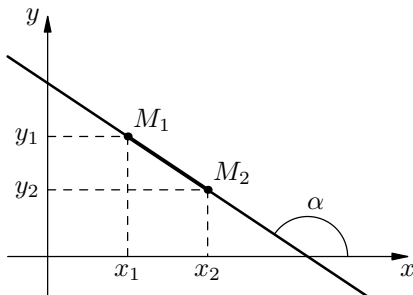


Рис. 5.6.

5.4. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Пусть на декартовой плоскости имеются две прямые l_1 и l_2 , заданные своими общими уравнениями:

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (5.1)_1$$

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0. \quad (5.1)_2$$

Исследуя их взаимное расположение, выделим три случая:

1. Прямые l_1 и l_2 **перпендикулярны** ($l_1 \perp l_2$) тогда и только тогда, когда

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

2. Прямые l_1 и l_2 параллельны ($l_1 \parallel l_2$) или совпадают тогда и только тогда, когда коэффициенты (A_1, B_1) и (A_2, B_2) пропорциональны, т.е. $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$ при некотором $\lambda \neq 0$. Если $A_2 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, то это свойство можно записать в виде пропорции:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

3. Прямые l_1 и l_2 совпадают ($l_1 = l_2$) тогда и только тогда, когда коэффициенты (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) пропорциональны, т. е. $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$ при некотором $\lambda \neq 0$. Если $A_2 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, это свойство можно записать в виде равенств двух пропорций:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

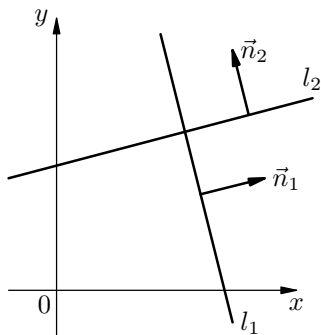


Рис. 5.7.

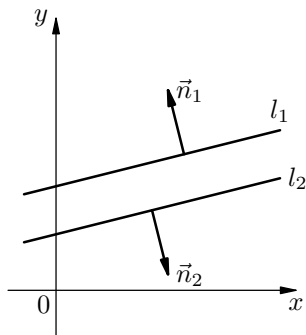


Рис. 5.8.

Доказательство утверждения 1 следует из того, что перпендикулярность прямых l_1 и l_2 равносильна **перпендикулярности** нормальных им векторов $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ (рис. 5.7). Последнее обстоятельство равносильно равенству нулю их скалярного произведения:

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Справедливость утверждения 2 следует из того, что прямые l_1 и l_2 параллельны или совпадают в том и только том случае, когда их нормальные векторы $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ **коллинеарны**, что равносильно пропорциональности их координат.

Заметим, что условие параллельности прямых l_1 и l_2 (не исключающее возможность их совпадения) удобно записать в виде равенства нулю определителя второго порядка:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Докажем утверждение 3. Ясно, что если все коэффициенты уравнений (5.1)₁ и (5.1)₂ пропорциональны, то прямые l_1 и l_2 совпадают.

Обратно, пусть прямые l_1 и l_2 совпадают. Тогда в силу утверждения 2, $A_1 = \lambda A_2$ и $B_1 = \lambda B_2$ при некотором $\lambda \neq 0$. Следовательно, уравнение (5.1)₁ может быть переписано в виде:

$$\lambda A_2 x + \lambda B_2 y + C_1 = 0.$$

Пусть $M(x_0, y_0)$ — точка, принадлежащая $l_1 = l_2$. Тогда

$$\lambda A_2 x_0 + \lambda B_2 y_0 + C_1 = 0,$$

$$A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 = 0.$$

Вычитая из предпоследнего равенства последнее, умноженное на λ , получаем:

$$C_1 - \lambda C_2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad C_1 = \lambda C_2.$$

Таким образом, $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$, и утверждение доказано.

Легко заметить, что условие совпадения прямых l_1 и l_2 можно записать в виде равенства нулю трех определителей:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

В «общем случае» прямые l_1 и l_2 , заданные общими уравнениями (5.1)₁ и (5.1)₂, пересекаются в одной точке. Возникает вопрос о вычислении угла между прямыми.

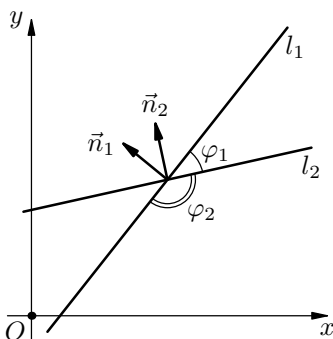


Рис. 5.9.

Углом между пересекающимися прямыми на плоскости называется величина меньшего из углов, образованных данными прямыми. Здесь допущена вольность речи в случае, когда прямые перпендикулярны и все углы на плоскости, образованные данными прямыми, равны. Естественно, **угол между перпендикулярными прямыми полагается равным 90° . Угол между параллельными или между совпадающими прямыми считается равным 0° .**

Обозначим один из углов между прямыми l_1 и l_2 через φ_1 , а смежный с ним угол — φ_2 (рис. 5.9). Для определенности будем считать, что $\varphi_1 \leq 90^\circ$, то есть, угол между прямыми l_1 и l_2 равен φ_1 .

При этом угол между нормальными векторами $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ к прямым l_1 и l_2 может быть равен или φ_1 , или φ_2 . В первом случае $\varphi_1 = \widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}$, а во втором $\varphi_1 = 180^\circ - \widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2} = 180^\circ - \varphi_2$. Следовательно, в обоих случаях косинус угла между прямыми равен абсолютной величине косинуса угла между нормальными:

$$\cos \varphi_1 = |\cos \widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}| = \left| \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \right|,$$

или

$$\cos \varphi_1 = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (5.4)$$

Так как $\sin \varphi_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1}$, из формулы (5.4) получаем:

$$\sin \varphi_1 = \frac{|A_1 B_2 - A_2 B_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (5.5)$$

Следовательно, если прямые l_1 и l_2 не перпендикулярны (т.е. $A_1 A_2 + B_1 B_2 \neq 0$), мы получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|. \quad (5.6)$$

Если $B_1 \neq 0$ и $B_2 \neq 0$, то прямые l_1 и l_2 могут быть заданы уравнениями вида (5.3) с угловыми коэффициентами:

$$l_1: y = k_1 x + b_1, \quad k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad b_1 = -\frac{C_1}{B_1},$$

$$l_2: y = k_2 x + b_2, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}, \quad b_2 = -\frac{C_2}{B_2}.$$

В этом случае формулу для нахождения угла между прямыми мы получаем, разделив числитель и знаменатель правой части равенства (5.6) на произведение $B_1 B_2$:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \quad (5.7)$$

5.5. Каноническое уравнение прямой на плоскости

Мы познакомились с общим уравнением прямой на плоскости. Часто бывает полезно использовать другие виды уравнений, коэффициенты которых имеют иное геометрическое содержание, нежели коэффициенты общего уравнения прямой.

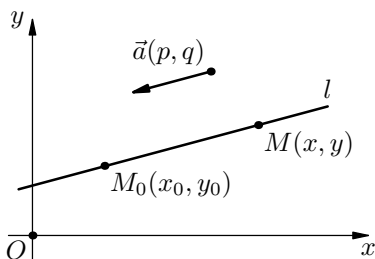


Рис. 5.10.

Пусть l — прямая на плоскости. **Всякий ненулевой вектор $\vec{a}(p, q)$, параллельный прямой l , называется направляющим вектором прямой l** (рис. 5.10).

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — точка прямой l и $\vec{a}(p, q)$ — ее направляющий вектор. Точка $M(x, y)$ принадлежит данной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0 M}(x - x_0, y - y_0)$ и $\vec{a}(p, q)$ коллинеарны. Условие коллинеарности этих векторов мы можем представить как равенство нулю определителя второго порядка (см. замечание к примеру 4.3):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ p & q \end{vmatrix} = 0, \quad (5.8)$$

или

$$q(x - x_0) - p(y - y_0) = 0.$$

В случае, если $p \neq 0$ и $q \neq 0$, это уравнение можно переписать так:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}. \quad (5.9)$$

Уравнение (5.9) называется **каноническим уравнением прямой** на плоскости. Входящие в него коэффициенты имеют следующий геометрический смысл: (x_0, y_0) — координаты некоторой точки прямой, описываемой уравнением (5.9), а (p, q) — координаты направляющего вектора этой прямой.

Условимся писать уравнение (5.9) и в том случае, если p или q равно нулю, понимая, что равенство знаменателя одной из дробей соотношения (5.9) означает равенство нулю соответствующего числителя.

Например, каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1, -3)$ параллельно оси Oy , запишется так:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+3}{1},$$

в то время как общее уравнение этой прямой $x-1=0$.

5.6. Параметрические уравнения прямой на плоскости

В главе 1 обсуждались параметрические уравнения кривой на плоскости. Выведем теперь **параметрические уравнения прямой**.

Покажем, что **уравнения**

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + pt \\ y &= y_0 + qt \end{aligned} \right\}, \quad (5.10)$$

где параметр t принимает все числовые значения, суть **параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\vec{a}(p, q)$** (рис. 5.10).

Действительно, точка $M(x, y)$ принадлежит прямой в том и только том случае, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ коллинеарны, т. е. отличаются числовым множителем t :

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}.$$

Или в координатах

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= tp \\ y - y_0 &= tq \end{aligned} \right\},$$

что равносильно (5.10).

Уравнения (5.10) являются уравнениями движения точки на плоскости с постоянным вектором скорости $\vec{a}(p, q)$ при условии, что в момент времени $t=0$ точка имеет координаты (x_0, y_0) .

5.7. Уравнение прямой по двум точкам

Решим задачу о нахождении уравнения прямой, проходящей через две различные заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

В этом случае в качестве направляющего вектора мы можем взять вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. И такое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.11)_1$$

или

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (5.11)_2$$

или в параметрической форме

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \end{aligned} \right\}. \quad (5.11)_3$$

5.8. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными с геометрической точки зрения.

При решении задач «на прямую»¹ в свете изложенной теории часто возникает вопрос о решении системы двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Мы снова рассмотрим его с геометрической точки зрения (см. пример 4.4).

Речь идет о системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

$$(A_1^2 + B_1^2 \neq 0, \quad A_2^2 + B_2^2 \neq 0).$$

Требуется найти все решения системы, т. е. все пары чисел (x, y) , которые после подстановки их в уравнения обращают оба уравнения системы в тождества.

Каждое уравнение системы мы можем рассматривать как уравнение прямой на плоскости. Обозначим эти прямые l_1 и соответственно l_2 . Точка $M(x, y)$ принадлежит пересечению прямых l_1 и l_2 в том

¹ Основные задачи на прямую систематически изложил Лакруа в 4-м томе «Курса математики» (Париж, 1798/99 г.), в котором наш предмет приобрел современную форму даже в деталях. Книга Тарнье «Начала аналитической геометрии» (Париж, 1801 г.) — первое сочинение, в заглавии которого появился термин «аналитическая геометрия».

и только том случае, когда ее координаты (x, y) удовлетворяют системе (5.12). Таким образом, алгебраический вопрос о решении системы (5.12) мы переведем на геометрический язык: требуется найти все точки пересечения прямых l_1 и l_2 .

Возможны три случая.

1. Прямые l_1 и l_2 пересекаются в одной точке. Это означает, что нормальные векторы прямых не коллинеарны, т. е.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В этом случае система (5.12) называется **определенной** и для нахождения ее единственного решения существуют, как мы уже знаем, формулы Крамера (см. пример 4.4). Для системы (5.12) эти формулы приобретают вид:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

2. Прямые l_1 и l_2 параллельны, но не совпадают. В этом случае система (5.12) не имеет решений и называется **несовместной**. Имеем:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

но один из определителей

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

3. Прямые l_1 и l_2 совпадают. Тогда система (5.12) имеет бесконечное множество решений и называется **неопределенной**. В этом случае все три определителя, выписанные в предыдущем пункте, равны нулю.

5.9. Расстояние от точки до прямой на плоскости

Пусть прямая l задана общим уравнением (5.1). Покажем, что если в левую часть уравнения (5.1) подставить координаты произвольной точки $M(x, y)$ плоскости и разделить результат на $\sqrt{A^2 + B^2}$, то получится число, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки M до прямой l .

Действительно, пусть $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая точка этой прямой. Тогда $Ax_0 + By_0 + C = 0$ и уравнение прямой l можно представить

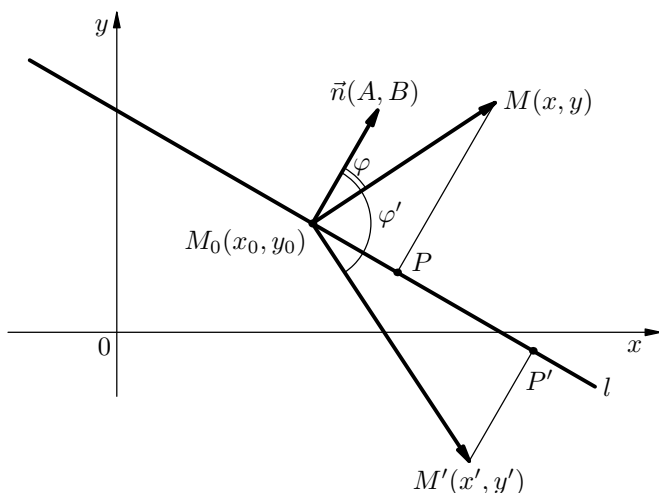


Рис. 5.11.

в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (5.14)$$

Если координаты любой точки плоскости $M(x, y)$ подставить в левую часть уравнения (5.14), то мы получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = (\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}), \quad (5.15)$$

где $\vec{n}(A, B)$ — нормальный вектор к прямой l .

Следовательно,

$$|(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M})| = |\vec{n}| |\overrightarrow{M_0M}| |\cos \varphi| = |\vec{n}| |MP|,$$

где P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l (рис. 5.11). Таким образом, расстояние от точки M до прямой l вычисляется по формуле

$$|MP| = \frac{|(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M})|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (5.16)$$

Утверждение доказано.

Отметим, что знак скалярного произведения $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M})$ зависит от того, как направлены его сомножители. Оно имеет знак плюс, если векторы направлены в одну полуплоскость (на рисунке это векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$) и знак минус, если в разные (на рисунке $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M'}$). Поэтому для точек одной полуплоскости с границей l выражение $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M})$ положительно, а для точек другой — отрицательно.

Пример 5.1. Найдём уравнение геометрического места точек, равноудалённых от двух пересекающихся прямых l_1 и l_2 , заданных уравнениями:

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

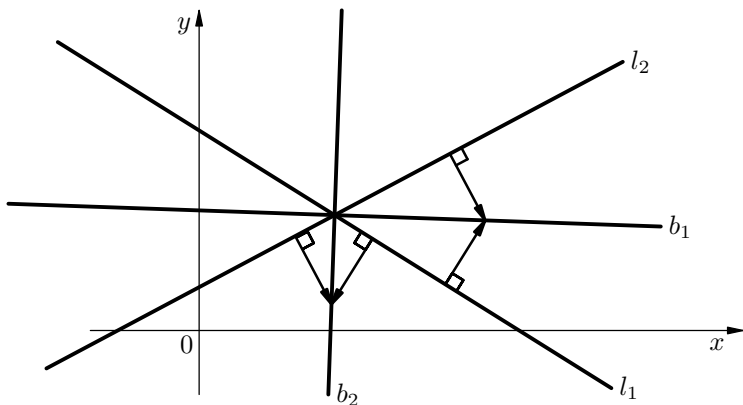


Рис. 5.12.

Геометрически очевидно, что искомое множество состоит из точек, принадлежащих биссектрисам b_1 и b_2 всех углов, образованных при пересечении прямых l_1 и l_2 (рис. 5.12).

Из формулы (5.16) следует, что уравнение искомого геометрического места таково:

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Следовательно, уравнения биссектрис имеют вид:

$$\begin{aligned} b_1: \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} &= \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \\ b_2: \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} &= -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \end{aligned}$$

ГЛАВА 6. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

6.1. Уравнение поверхности и уравнения кривой в пространстве

Из школьного курса геометрии известны примеры поверхностей: плоскость, сфера, цилиндр, конус.

Общее определение поверхности мы не приводим.

Итак, пусть в пространстве имеется поверхность и задана декартова система координат (рис. 6.1).

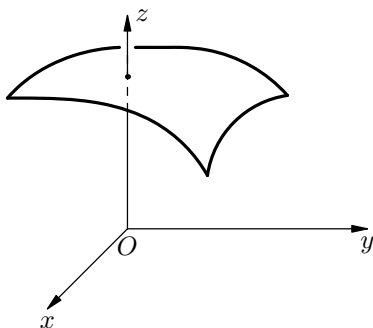


Рис. 6.1.

Уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \quad (6.1)$$

называется уравнением поверхности в неявной форме, если точка $M(x, y, z)$ принадлежит поверхности в том и только том случае, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (6.1).

Рассмотрим, к примеру, уравнение сферы в пространстве. Пусть $O_1(a, b, c)$ — ее центр, а R — радиус. Точка $M(x, y, z)$ тогда и только тогда принадлежит сфере, когда находится на расстоянии R от ее центра, что в свою очередь, справедливо тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют соотношению

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0.$$

По определению это и есть искомое уравнение сферы.

Две поверхности в пространстве пересекаются, как правило, по кривой (рис. 6.2).

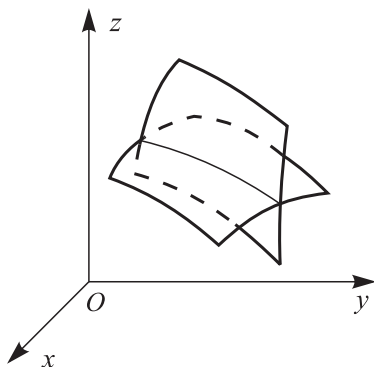


Рис. 6.2.

Это дает основание принять следующее определение.

Систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0 \\ F_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

называют **уравнениями кривой в неявной форме**, если точка $M(x, y, z)$ принадлежит кривой в том и только том случае, когда ее координаты удовлетворяют каждому из уравнений (6.2).

Например, всякую окружность в пространстве можно представить как пересечение двух сфер. Пусть для заданной окружности это сферы с центрами $O_1(a_1, b_1, c_1)$ и $O_2(a_2, b_2, c_2)$ и радиусами R_1 и R_2 соответственно. Тогда система уравнений

$$\left. \begin{aligned} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 - R_1^2 &= 0 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 - R_2^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

представляет собой уравнения окружности.

Как и в случае кривых на плоскости, часто удобно пользоваться параметрическими уравнениями кривой в пространстве.

Снова (см. гл. 1) представим себе кривую как «след движущейся точки», т. е. пусть точка M движется вдоль кривой и в момент времени t имеет координаты $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$.

Систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\}, \quad (6.3)$$

которая задает координаты произвольной точки кривой как функции параметра t , мы будем называть уравнениями кривой в параметрической форме.

Например, уравнения

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos t \\ y &= R \sin t \\ z &= bt \end{aligned} \right\}$$

представляют собой параметрические уравнения винтовой линии (рис. 6.3).

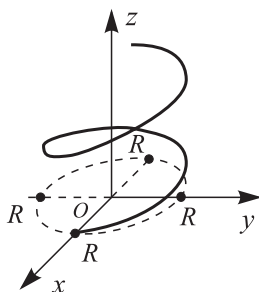


Рис. 6.3.

Теперь мы переходим к изучению плоскостей в пространстве с помощью их уравнений в декартовой системе координат.

6.2. Общее уравнение плоскости в пространстве

Пусть $Oxyz$ — декартова система координат в пространстве. Покажем, что всякая плоскость в этой д. с. к. задается уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (6.4)$$

где A, B, C, D — постоянные, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Уравнение (6.4) называется общим уравнением плоскости в пространстве.

Пусть π — произвольная плоскость в пространстве, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка, принадлежащая этой плоскости, а $\vec{n}(A, B, C)$ — произвольный

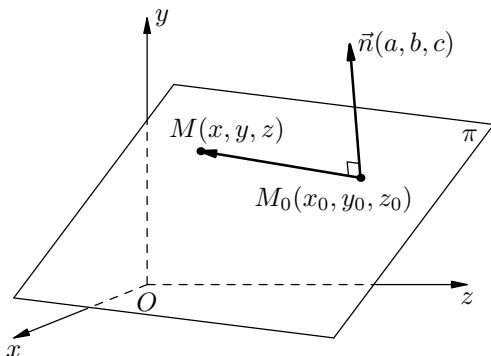


Рис. 6.4.

нормальный вектор к π (т. е. ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости π) (рис. 6.4).

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости π . Тогда векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ перпендикулярны, что означает равенство нулю их скалярного произведения: $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$.

Записывая скалярное произведение с помощью декартовых координат векторов, имеем:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (6.5)$$

Итак, координаты каждой точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости π , удовлетворяют уравнению (6.5), которое после раскрытия скобок и изменения порядка слагаемых принимает вид:

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0.$$

Это уравнение (6.4), в котором $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Обратно, если точка $M(x, y, z)$ такова, что ее координаты удовлетворяют уравнению (6.5), то для скалярного произведения векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ имеем $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$. Последнее означает принадлежность точки $M(x, y, z)$ плоскости π .

Мы доказали, что уравнение (6.5), которое равносильно уравнению вида (6.4), есть уравнение плоскости π .

Теперь убедимся, что **всякое уравнение вида (6.4) определяет плоскость в пространстве при условии, что $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.**

Пусть (x_0, y_0, z_0) — какое-нибудь решение уравнения (6.4):

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Вычитая последнее равенство из уравнения (6.4), мы преобразуем это уравнение к виду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Как было установлено выше, в таком виде оно представляет собой уравнение плоскости π , проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с нормальным вектором $\vec{n}(A, B, C)$. Это уравнение называется **уравнением плоскости по точке и нормали**. Утверждение доказано.

Заметим, что в процессе доказательства мы установили, что коэффициенты A, B, C в общем уравнении плоскости (6.4) имеют простой геометрический смысл: это координаты вектора, нормального к данной плоскости.

6.3. Особенности расположения плоскости относительно системы координат.

Выясним особенности в расположении плоскости относительно д. с. к., если задающее ее общее уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

имеет тот или иной частный вид.

1. $A = 0, B = 0$. Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости, параллелен оси Oz . Таким образом, плоскость параллельна координатной плоскости Oxy и совпадает с ней, если $D = 0$ (рис. 6.5).

2. $B = 0, C = 0$. Плоскость параллельна координатной плоскости Oyz и совпадает с ней, если $D = 0$.

3. $A = 0, C = 0$. Плоскость параллельна координатной плоскости Oxz и совпадает с ней, если $D = 0$.

4. $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$. Вектор $\vec{n}$ перпендикулярен оси Ox . Плоскость параллельна оси Ox и проходит через нее, если $D = 0$ (рис. 6.6).

5. $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$. Плоскость параллельна оси Oy и проходит через нее, если $D = 0$.

6. $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$. Плоскость параллельна оси Oz и проходит через нее, если $D = 0$.

7. $D = 0$. Плоскость проходит через начало координат (рис. 6.7).

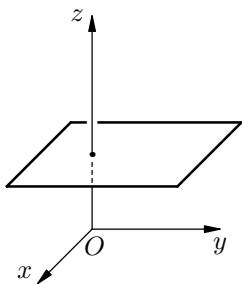


Рис. 6.5.

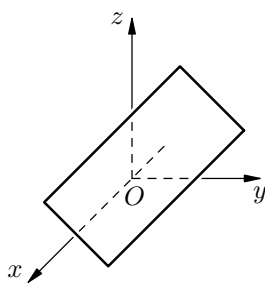


Рис. 6.6.

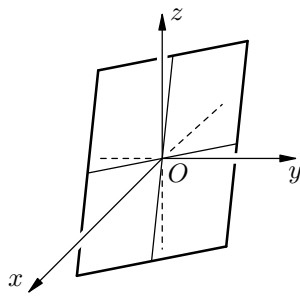


Рис. 6.7.

6.4. Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть в пространстве имеются две плоскости π_1 и π_2 , заданные своими общими уравнениями:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (6.4)_1$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (6.4)_2$$

Исследуя их взаимное расположение, рассмотрим три случая.

1. Плоскости π_1 и π_2 перпендикулярны ($\pi_1 \perp \pi_2$) тогда и только тогда, когда

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

2. Плоскости π_1 и π_2 параллельны или совпадают ($\pi_1 \parallel \pi_2$ или $\pi_1 = \pi_2$) тогда и только тогда, когда коэффициенты (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) пропорциональны, т. е. $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$ при некотором $\lambda \neq 0$ (иначе: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, если все эти коэффициенты не равны нулю).

3. Плоскости π_1 и π_2 совпадают ($\pi_1 = \pi_2$) тогда и только тогда, когда коэффициенты (A_1, B_1, C_1, D_1) и (A_2, B_2, C_2, D_2) пропорциональны, т. е. $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$, $D_1 = \lambda D_2$ при некотором $\lambda \neq 0$.

Если все коэффициенты не равны нулю, это свойство можно записать в виде равенств:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Доказательства утверждений 1–3 с понятными изменениями повторяют доказательства аналогичных утверждений, касающихся взаимного расположения прямых на плоскости (см. раздел 5.2) и поэтому опускаются.

Снова рассмотрим две плоскости в пространстве π_1 и π_2 , которые заданы своими общими уравнениями (6.4)₁ и (6.4)₂.

Углом между пересекающимися плоскостями в пространстве называется величина меньшего из двугранных углов, образованных данными плоскостями. Здесь так же, как и в разделе 5.4, допущена вольность речи в случае, когда плоскости перпендикулярны и все двугранные углы, образованные данными плоскостями, равны. Естественно, **угол между перпендикулярными плоскостями полагается равным 90° . Угол между параллельными или между совпадающими плоскостями считается равным 0° .**

Предположим, что данные плоскости π_1 и π_2 пересекаются, не совпадая друг с другом. Пусть φ_1 — величина одного из двугранных углов между этими плоскостями, а φ_2 — величина смежного с ним угла (рис. 6.8). Для определенности будем считать, что $\varphi_2 \leq 90^\circ$, то есть угол между плоскостями π_1 и π_2 равен φ_2 .

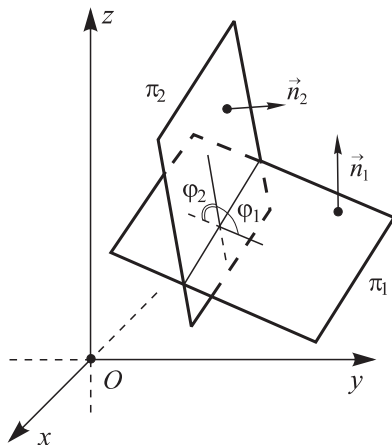


Рис. 6.8.

При этом угол между нормальными векторами $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ может быть равен или φ_1 , или φ_2 . В первом случае $\varphi_2 = 180^\circ - \widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2} = 180^\circ - \varphi_1$, а во втором $\varphi_2 = \widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}$. Следовательно,

в обоих случаях косинус угла φ_2 между плоскостями π_1 и π_2 равен абсолютной величине косинуса угла между нормальными:

$$\cos \varphi_2 = \left| \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \right|,$$

или

$$\cos \varphi_2 = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (6.6)$$

Из формулы (6.6), кстати, тоже вытекает необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

6.5. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость π задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0). \quad (6.7)$$

Покажем, что если в левую часть уравнения плоскости π подставить координаты произвольной точки $M(x, y, z)$ пространства и разделить результат на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, то получится число, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки M до плоскости π .

Зафиксируем некоторую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскости π (рис. 6.9). Тогда

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

и уравнение (6.7) плоскости π можно представить в виде:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (6.8)$$

Если координаты произвольной точки $M(x, y, z)$ пространства подставить в левую часть уравнения (6.8), то мы получим:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = (\vec{n}, \overrightarrow{M_0 M}), \quad (6.9)$$

где $\vec{n}(A, B, C)$ — нормальный вектор к плоскости π .

Следовательно,

$$|(\vec{n}, \overrightarrow{M_0 M})| = |\vec{n}| |\overrightarrow{M_0 M}| \cos \varphi = |\vec{n}| MP,$$

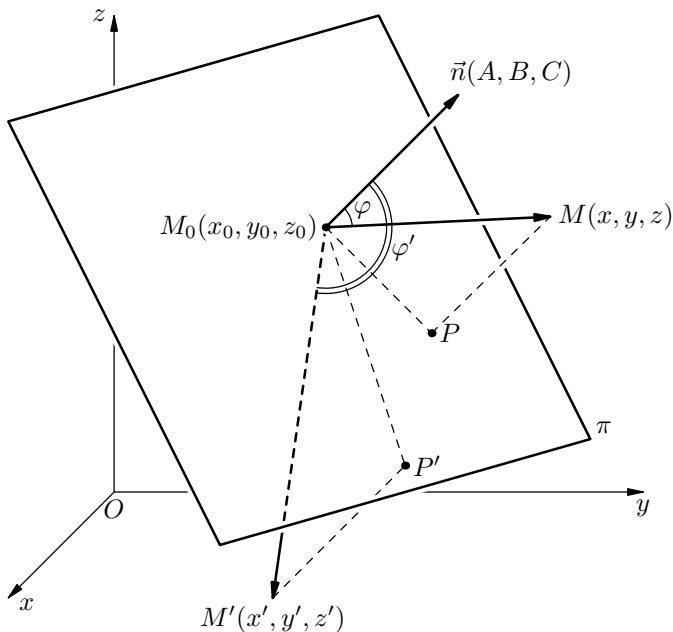


Рис. 6.9.

и расстояние от точки M до плоскости π вычисляется по формуле:

$$MP = \frac{|(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M})|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Отметим, что знак скалярного произведения $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M})$ зависит от взаимного расположения векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$. Оно имеет знак плюс, если векторы направлены в одно полупространство (на рис. 6.9 это векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$) и знак минус, если в разные (на рис. 6.9 — векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M'}$). Поэтому для точек одного полупространства скалярное произведение $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M})$ положительно, а для другого — отрицательно.

Имеющиеся в нашем распоряжении сведения дают возможность решать много важных задач, некоторые из которых будут рассмотрены в конце главы.

Теперь мы переходим к рассмотрению прямой в пространстве.

6.6. Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве

Пусть в пространстве задана прямая l . **Всякий ненулевой вектор $\vec{a}(p, q, r)$, параллельный прямой l , называется направляющим вектором прямой l** (рис. 6.10).

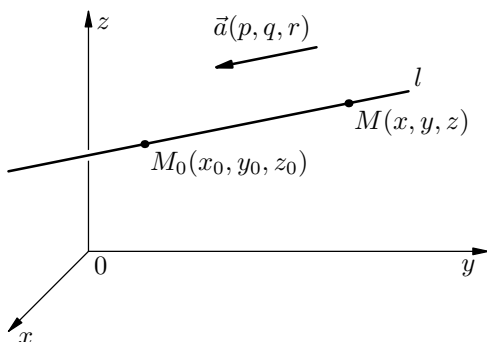


Рис. 6.10.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка, лежащая на прямой l , а $\vec{a}(p, q, r)$ — ее направляющий вектор. Точка $M(x, y, z)$ принадлежит прямой l в том и только в том случае, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ коллинеарны, т. е. отличаются числовым множителем t :

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a},$$

или в координатах:

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= tp \\ y - y_0 &= tq \\ z - z_0 &= tr \end{aligned} \right\}.$$

Итак, мы получаем **параметрические уравнения прямой¹, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, с направляющим вектором $\vec{a}(p, q, r)$:**

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + tp \\ y &= y_0 + tq \\ z &= z_0 + tr \end{aligned} \right\}. \quad (6.10)$$

¹ Параметрические уравнения прямой в пространстве дал О. Л. Коши (1826 г.).

Ясно, что уравнения (6.10) являются уравнениями движения точки в пространстве с постоянным вектором скорости $\vec{a}(p, q, r)$ при условии, что в момент времени $t = 0$ точка имеет координаты (x_0, y_0, z_0) .

Из параметрических уравнений прямой (6.10) следует, что если $p \neq 0$, $q \neq 0$, $r \neq 0$, то координаты (x, y, z) любой точки прямой с направляющим вектором $\vec{a}(p, q, r)$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}. \quad (6.11)$$

Условимся писать эти соотношения и в том случае, когда одно или два из чисел p , q , r равны нулю, считая, что если какой-нибудь из знаменателей равен нулю, то равен нулю и соответствующий числитель (см. аналогичный пример в разделе 5.5).

При этом соглашении любая тройка чисел (x, y, z) , определяемая соотношениями (6.10), будет удовлетворять соотношениям (6.11) и наоборот. Значит, уравнения (6.11) являются уравнениями прямой, которые называются **каноническими уравнениями прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, с направляющим вектором $\vec{a}(p, q, r)$** .

6.7. Общие уравнения прямой в пространстве

Прямая l в пространстве относительно декартовой системы координат может быть задана уравнениями двух плоскостей, пересекающихся по этой прямой:

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6.12)$$

Здесь мы имеем частный случай системы (6.2), дающей уравнения кривой в неявной форме.

Уравнения прямой (6.12) называются общими уравнениями прямой.

Рассмотрим вопрос о приведении общих уравнений (6.12) прямой l к каноническому виду. Пусть первое из уравнений (6.12) есть уравнение плоскости π_1 с нормальным вектором $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$, а второе — уравнение плоскости π_2 с нормальным вектором $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ (см. рис. 6.11).

Возьмем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой l , т. е. рассмотрим некоторое решение (x_0, y_0, z_0) системы уравнений (6.12). (Для этого достаточно придать одному из неизвестных числовое значение и найти остальные неизвестные из системы.)

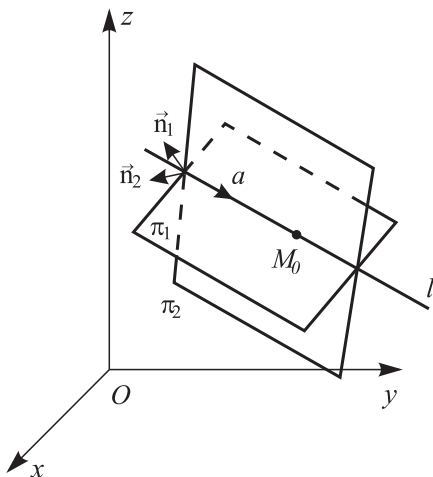


Рис. 6.11.

Вектор $\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ может быть выбран как направляющий вектор прямой l , поскольку $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] \perp \vec{n}_1$ и $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] \perp \vec{n}_2$, следовательно, $\vec{a}$ параллелен обеим плоскостям. Его координаты, как известно, могут быть найдены с помощью определителей второго порядка:

$$\vec{a} \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Тогда искомые канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

6.8. Взаимное расположение прямой и плоскости

Здесь мы исследуем взаимное расположение прямой

$$l: \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

и плоскости

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

в пространстве.

Установим следующее:

1. Плоскость π и прямая l пересекаются тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$Ap + Bq + Cr \neq 0.$$

2. Плоскость и прямая параллельны тогда и только тогда, когда выполнены соотношения:

$$Ap + Bq + Cr = 0; \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

3. Прямая l лежит в плоскости π тогда и только тогда, когда выполнены соотношения:

$$Ap + Bq + Cr = 0; \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Сначала докажем достаточность сформулированных признаков. Запишем параметрические уравнения прямой l :

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + pt \\ y &= y_0 + qt \\ z &= z_0 + rt \end{aligned} \right\}.$$

Подставляя в уравнение плоскости π координаты произвольной точки прямой l , имеем:

$$A(x_0 + tp) + B(y_0 + tq) + C(z_0 + tr) + D = 0,$$

или

$$(Ap + Bq + Cr)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (6.13)$$

1. Если $Ap + Bq + Cr \neq 0$, то уравнение (6.13) имеет единственное решение относительно t . Это означает, что прямая l и плоскость π пересекаются в одной точке. С геометрической точки зрения условие этого пункта означает, что нормаль $\vec{n}(A, B, C)$ к плоскости и направляющий вектор $\vec{a}(p, q, r)$ прямой не перпендикулярны. Иными словами, прямая l не параллельна ни одной прямой, лежащей в плоскости π .

2. В случае, если $Ap + Bq + Cr = 0$; $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, уравнение (6.13) не имеет решений относительно t , что означает, что плоскость π и прямая l не имеют общих точек, т. е. параллельны. Геометрический смысл первого условия этого пункта состоит в том, что нормаль к плоскости перпендикулярна направляющему вектору прямой; второго — в том, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой l не принадлежит плоскости.

3. Если $Ap + Bq + Cr = 0$; $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то всякое число t является решением уравнения (6.13), что означает принадлежность прямой l плоскости π . С геометрической точки зрения векторы $\vec{n}$ и $\vec{a}$ перпендикулярны, и точка M_0 принадлежит плоскости.

Выведенные нами достаточные условия взаимного расположения прямой и плоскости являются одновременно и необходимыми условиями, так как они взаимно исключают друг друга.

Углом между прямой l и плоскостью π называется меньший из двух углов между этой прямой и ее проекцией на плоскость.

Пусть плоскость π задана своим общим уравнением (6.4), а прямая l — каноническими уравнениями (6.11).

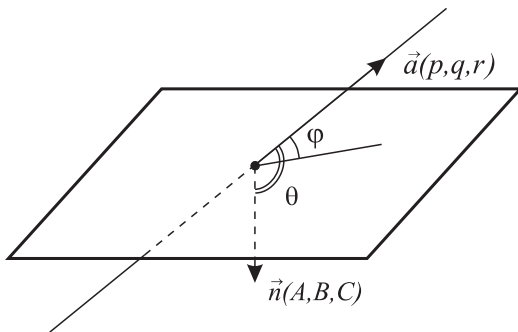


Рис. 6.12.

Косинус угла θ между вектором нормали к плоскости $\vec{n}(A, B, C)$ и направляющим вектором $\vec{a}(p, q, r)$ прямой l по абсолютной величине равен синусу угла φ между прямой l и плоскостью π (см. рис. 6.12).

Так как

$$\cos \theta = \frac{Ap + Bq + Cr}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

мы получаем, что

$$\sin \varphi = \frac{|Ap + Bq + Cr|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}. \quad (6.14)$$

Если прямая, заданная уравнениями (6.11), перпендикулярна плоскости π , то направляющий вектор прямой $\vec{a}(p, q, r)$ коллинеарен вектору $\vec{n}(A, B, C)$ нормали к плоскости, т.е. существует такое отличное

от нуля число λ , что

$$A = \lambda p, \quad B = \lambda q, \quad C = \lambda r. \quad (6.15)$$

Очевидно, что выполнение соотношений (6.15) есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямой l и плоскости π .

6.9. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы своими каноническими уравнениями:

$$l_1: \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1}; \quad (6.12)_1$$

$$l_2: \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{r_2}. \quad (6.12)_2$$

Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, лежащие на прямых соответственно l_1 и l_2 , а также направляющие векторы $\vec{a}_1(p_1, q_1, r_1)$ и $\vec{a}_2(p_2, q_2, r_2)$ данных прямых.

Приведем ниже необходимые и достаточные условия взаимного расположения прямых l_1 и l_2 в пространстве. Они собраны для краткости в виде таблицы.

Прямые скрещиваются, т. е. не лежат в одной плоскости:	векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не компланарны, т. е. $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} \neq 0.$
Прямые пересекаются:	векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарны, но векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны, т. е. $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \vec{a}_1 \neq \lambda \vec{a}_2.$
Прямые параллельны:	векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны, но вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ им не коллинеарен, т. е. $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2, \quad \overrightarrow{M_1M_2} \neq \mu \vec{a}_2.$
Прямые совпадают:	три вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарны, т. е. $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2, \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \mu \vec{a}_2.$

Напомним, что углом между двумя прямыми в пространстве называется наименьший угол между двумя параллельными им прямыми, проходящими через произвольную точку пространства (рис. 6.13).

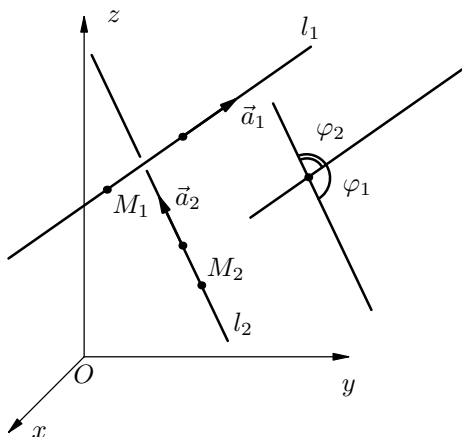


Рис. 6.13.

Выведем формулу для определения угла между прямыми l_1 и l_2 , заданными уравнениями (6.12)₁ и (6.12)₂.

Обозначим через φ_1 один из углов, образованных прямыми, параллельными l_1 и l_2 ; пусть φ_2 — смежный с ним угол (рис. 6.13). Положим для определенности $\varphi_2 \leq 90^\circ$, т. е. угол между l_1 и l_2 равен φ_2 .

Поскольку $\vec{a}_1(p_1, q_1, r_1)$ и $\vec{a}_2(p_2, q_2, r_2)$ — направляющие векторы прямых l_1 и l_2 , угол между этими векторами равен либо φ_1 , либо φ_2 . В обоих случаях

$$\cos \varphi_2 = |\cos \widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2}| = \left| \frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} \right|,$$

или

$$\cos \varphi_2 = \frac{|p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}. \quad (6.16)$$

Отсюда получаем, что выполнение соотношения

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0$$

есть необходимое и достаточное условие взаимной перпендикулярности двух прямых l_1 и l_2 в пространстве.

6.10. Примеры решения задач

В заключение этой главы приведем решения некоторых важных типовых задач на прямую и плоскость в пространстве.

1. Составим уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ можно выбрать в качестве направляющего вектора нашей прямой. Следовательно, наша прямая может быть задана каноническими уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

2. Составим уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Точка $M(x, y, z)$ принадлежит нашей плоскости в том и только том случае, когда векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны. Записывая условие компланарности трех векторов с помощью определителя, находим искомое уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Составим уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельную плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Поскольку вектор $\vec{n}(A, B, C)$ является нормальным к искомой плоскости, имеем следующий ответ:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

4. Составим уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно прямой

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}.$$

Так как прямые имеют общий направляющий вектор, получаем искомые уравнения:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

5. Составим уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Нормальный вектор $\vec{n}(A, B, C)$ к данной плоскости является направляющим для искомой прямой, следовательно, канонические уравнения прямой имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

6. Составим уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной прямой

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

Поскольку направляющий вектор $\vec{d}(p, q, r)$ данной прямой перпендикулярен искомой плоскости, получаем ответ в виде уравнения плоскости по точке и нормали:

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0.$$

7. Составим уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной прямым

$$\frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1}; \quad \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{r_2}.$$

Направляющие векторы $\vec{d}_1(p_1, q_1, r_1)$ и $\vec{d}_2(p_2, q_2, r_2)$ данных прямых при откладывании от точки M_0 будут лежать в искомой плоскости. Отсюда ясно, что точка $M(x, y, z)$ принадлежит искомой плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ компланарны. Ответ:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Найдем расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой

$$l: \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

Искомое расстояние равно высоте h параллелограмма, построенного на векторах $\vec{d}(p, q, r)$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$, где точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на данной прямой (см. рис. 6.14).

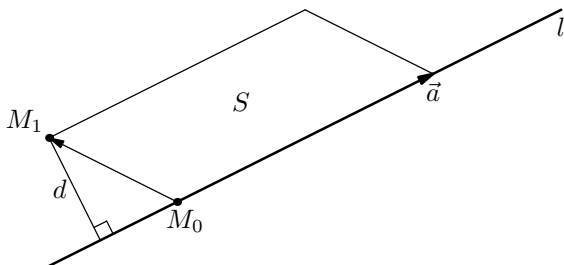


Рис. 6.14.

Поскольку площадь параллелограмма равна длине векторного произведения указанных векторов, и длина основания параллелограмма, перпендикулярного искомой высоте, равна $|\vec{a}|$, получаем ответ:

$$d = \frac{S}{|\vec{a}|} = \frac{|[\vec{M_0M_1}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}.$$

9. Найдем расстояние d между прямыми

$$l_1: \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{r_2}.$$

Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, лежащие на данных прямых, а также направляющие векторы $\vec{a}_1(p_1, q_1, r_1)$ и $\vec{a}_2(p_2, q_2, r_2)$ данных прямых. Способ вычисления расстояния между прямыми зависит от взаимного расположения их направляющих векторов. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны. В этом случае прямые l_1 и l_2 параллельны или совпадают, и расстояние между ними равно расстоянию от точки, лежащей на одной из них, до другой прямой, например, от точки M_1 до прямой l_2 . Согласно предыдущей задаче, имеем:

$$d = \frac{|[\vec{M_2M_1}, \vec{a_2}]|}{|\vec{a_2}|}.$$

По этой же формуле вычисляется расстояние от точки до прямой в пространстве (в данном случае — от точки M_1 до прямой l_2).

Случай 2. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны. Тогда прямые l_1 и l_2 либо пересекаются, либо скрещиваются. В последнем случае искомое

расстояние равно длине общего перпендикуляра данных скрещивающихся прямых, что равно высоте h параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ (см. рис. 6.15).

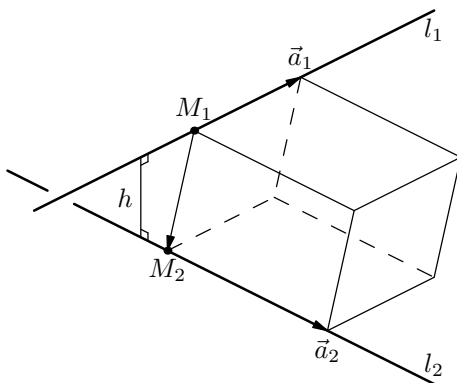


Рис. 6.15.

Поскольку объем параллелепипеда равен модулю смешанного произведения указанных векторов и основание, перпендикулярное искомой высоте, является параллелограммом, построенным на векторах $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, получаем ответ:

$$d = h = \frac{V}{S} = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|}.$$

ГЛАВА 7. ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА И ПАРАБОЛА

Эллипс, гипербола и парабола¹ — следующие по сложности после окружности кривые на плоскости. Их основные свойства будут изучены в этой главе.

7.1. Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть данное число $2a$, большее, чем расстояние $2c$ между фокусами.

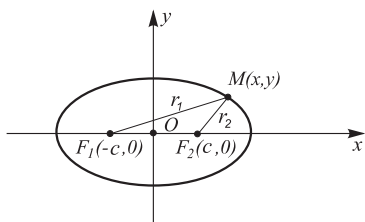


Рис. 7.1.

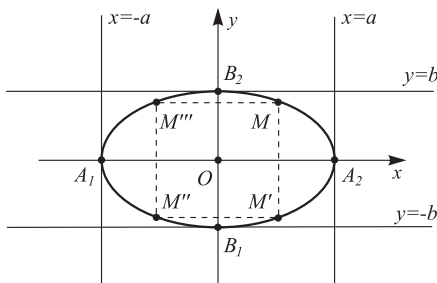


Рис. 7.2.

Пусть M — точка эллипса, F_1 и F_2 — его фокусы². Отрезки F_1M и F_2M , так же как и их длины $r_1 = F_1M$, $r_2 = F_2M$ называются **фокальными радиусами** точки M . Согласно определению эллипса:

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (7.1)$$

Составим уравнение эллипса, введя д. с. к. Oxy следующим образом. Выберем ось Ox проходящей через фокусы F_1 и F_2 , направленной от F_1 к F_2 , с началом координат O , совпадающим с серединой отрезка F_1F_2 . Ось Oy пусть совпадает со срединным перпендикуляром к отрезку F_1F_2 и имеет любое из двух возможных направлений.

¹ В переводе с греческого «эллипс» означает «недостаток», «гипербола» — «избыток», «преувеличение», а «парабола» — «наложение». Терминология связана со способом, которым строил эти кривые греческий геометр Аполлоний.

² «Фокус» — в переводе с латыни — «очаг». Термин связан с т. н. «оптическими свойствами» эллипса, гиперболы и параболы. Введен И. Кеплером в 1604 г.

В выбранной системе координат фокус F_1 имеет координаты $(-c, 0)$, а фокус F_2 — координаты $(c, 0)$.

Если (x, y) — координаты точки M эллипса, то

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Таким образом, мы приходим к уравнению эллипса:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (7.2)$$

Теперь мы преобразуем уравнение (7.2), освободившись от радикалов. Возводя обе части равенства (7.2) в квадрат, получим:

$$(x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)} = 4a^2,$$

или

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2).$$

Обе части последнего равенства также возводим в квадрат:

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) + (x^2 + y^2 + c^2)^2,$$

или

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

По условию имеем: $a > c$. Следовательно, $a^2 - c^2 > 0$. Обозначим $a^2 - c^2$ через b^2 :

$$a^2 - c^2 = b^2. \quad (7.3)$$

Тогда

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7.4)$$

Итак, координаты любой точки $M(x, y)$ эллипса удовлетворяют уравнению (7.4). Проверим, что справедливо обратное: если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (7.4), то эта точка принадлежит эллипсу, т. е. она удовлетворяет условию (7.1).

Пусть координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (7.4). Тогда

$$\begin{aligned} r_1 = F_1M &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \\ &= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + 2cx + b^2 + c^2} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2} = \left|a + \frac{cx}{a}\right|. \end{aligned}$$

Аналогично

$$r_2 = F_2 M = \left| a - \frac{cx}{a} \right|.$$

Так как (x, y) удовлетворяют уравнению (7.4), замечаем, что $|x| \leq a$. Поскольку $0 < c < a$, имеем: $a + \frac{c}{a}x > 0$ и $a - \frac{c}{a}x > 0$.

Следовательно,

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x \quad \text{и} \quad r_2 = a - \frac{c}{a}x. \quad (7.5)$$

Откуда $r_1 + r_2 = 2a$.

Таким образом, полностью доказано, что уравнение (7.4) есть уравнение эллипса. Заметим, что формулы (7.5) представляют большой самостоятельный интерес.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7.4)$$

называется каноническим уравнением эллипса. Так как это уравнение второй степени, эллипс представляет собой кривую второго порядка.

Теперь исследуем форму эллипса по его каноническому уравнению.

Так как в каноническое уравнение эллипса координаты x и y входят во **второй степени**, то если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, т. е. ее координаты удовлетворяют уравнению (7.4), то точки $M'(-x, y)$, $M''(x, -y)$, $M'''(-x, -y)$ также принадлежат этому эллипсу (рис. 7.2). Поэтому оси координат Ox и Oy являются осями симметрии для эллипса, заданного каноническим уравнением (7.4), а начало координат является его центром симметрии.

Из уравнения эллипса (7.4) следует, что для координат любой его точки выполнены неравенства:

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b.$$

Геометрически это означает, что эллипс расположен внутри прямоугольника (см. рис. 7.2), стороны которого определяются уравнениями:

$$x = \pm a, \quad y = \pm b.$$

Точки пересечения эллипса с его осями симметрии называются **вершинами эллипса**. Таким образом, эллипс, заданный каноническим уравнением (7.4), имеет четыре вершины:

$$A_1(-a, 0), \quad A_2(a, 0), \quad B_1(0, -b), \quad B_2(0, b).$$

Отрезок A_1A_2 , ограниченный вершинами эллипса, расположенными на оси симметрии, проходящей через фокусы F_1 и F_2 (а также длина $2a$ этого отрезка), называется **большой осью эллипса**, а отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ — **малой осью эллипса**.

Отрезки OA_1 и OA_2 , где O — центр симметрии эллипса (а также их длины, равные a) — называются **большими полуосями** эллипса, а отрезки OB_1 и OB_2 (и их длины, равные b) — **малыми полуосями** эллипса.

Разрешая уравнение (7.4) относительно y и считая, что $y \geq 0$, $0 \leq x \leq a$, получим:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

График этой функции представляет собой множество точек эллипса, расположенных в первом квадранте (рис. 7.3).

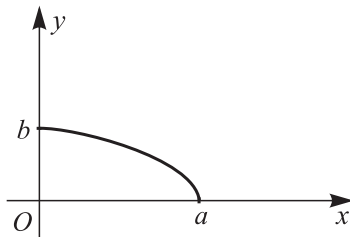


Рис. 7.3.

Функция является убывающей на отрезке $[0, a]$, причем $y = b$, если $x = 0$ и $y = 0$ при $x = a$.

Эллипс — выпуклая кривая, так как всякая прямая на плоскости пересекает его не более, чем в двух точках. Это следует из того, что прямая определяется уравнением первой степени, а эллипс — второй.

Итак, эллипс есть замкнутая выпуклая кривая, имеющая центр симметрии и две взаимно перпендикулярные оси симметрии.

Далее мы будем называть уравнение (7.4) каноническим уравнением эллипса и в тех случаях, когда $a = b$ или $0 < a < b$.

В случае, когда $a = b$, уравнение (7.4) принимает вид

$$x^2 + y^2 = a^2$$

и определяет окружность радиуса a с центром в начале координат O . Это означает, что мы можем рассматривать окружность как частный случай эллипса, который имеет место при совпадении фокусов F_1 и F_2 .

В случае $a < b$ большой полуосью будет b , а малой — a . При этом фокусы расположатся на оси Oy в точках $F_1(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$ и $F_2(0, \sqrt{b^2 - a^2})$.

Пусть теперь $a \geq b$. Отношение половины фокального расстояния к большой полуоси эллипса называется **эксцентриситетом** эллипса и обозначается буквой ε : $\varepsilon = c/a$.

Ясно, что $0 \leq \varepsilon < 1$, т. к. $0 \leq c < a$. Кроме того,

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Отсюда мы можем заключить, что если эксцентриситет равен нулю, то $b = a$ и эллипс является окружностью. Чем ближе эксцентриситет ε к единице, тем меньше $\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ и тем меньше отношение малой полуоси эллипса к большой. Таким образом, эксцентриситет характеризует степень «вытянутости» эллипса.

Заметим, что уравнения (7.5) могут быть теперь переписаны так:

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \varepsilon x, \\ r_2 &= a - \varepsilon x. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Уравнения (7.6) называются **фокальными уравнениями эллипса**.

7.2. Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть данное положительное число $2a$, меньшее, чем расстояние $2c$ между фокусами.

Пусть M — точка гиперболы, F_1 и F_2 — ее фокусы. Отрезки F_1M и F_2M , так же как и их длины $r_1 = F_1M$, $r_2 = F_2M$, называются **фокальными радиусами** точки M . Согласно определению гиперболы,

$$|r_1 - r_2| = 2a. \tag{7.7}$$

Составим уравнение гиперболы, введя декартову систему координат следующим образом. Выберем ось Ox проходящей через фокусы F_1 и F_2 , направленной от F_1 к F_2 , с началом координат O , совпадающим с серединой отрезка F_1F_2 . Ось Oy пусть совпадает со срединным перпендикуляром к отрезку F_1F_2 и имеет любое из двух возможных направлений.

В выбранной д. с. к. фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Если (x, y) — координаты точки M гиперболы, то

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Таким образом, мы приходим к уравнению гиперболы:

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a. \quad (7.8)$$

Упрощая это уравнение так же, как и для эллипса, мы получим уравнение:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Поскольку теперь $a < c$, обозначим разность $a^2 - c^2$ через $-b^2$:

$$a^2 - c^2 = -b^2 \quad \text{или} \quad c^2 = a^2 + b^2. \quad (7.9)$$

В этих обозначениях будем иметь:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7.10)$$

Итак, координаты любой точки $M(x, y)$ гиперболы удовлетворяют уравнению (7.10). Проверим, что справедливо обратное: если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (7.10), то эта точка принадлежит гиперболе, т. е. она удовлетворяет условию (7.7).

Пусть координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (7.10). Тогда

$$\begin{aligned} r_1 = F_1M &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)} = \\ &= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}x^2 + 2cx + c^2 - b^2} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a} \right)^2} = \left| \frac{cx}{a} + a \right|. \end{aligned}$$

Аналогично

$$r_2 = F_2M = \left| \frac{cx}{a} - a \right|.$$

Из уравнения (7.10) следует, что $|x| \geq a$.

Если $x \geq a$, то в силу того, что $c > a > 0$, мы получим:

$$\frac{cx}{a} + a > 0, \quad \frac{cx}{a} - a > 0.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{cx}{a} + a \\ r_2 &= \frac{cx}{a} - a \end{aligned} \right\}, \text{ если } x \geq a. \quad (7.11)$$

Если $x \leq -a$, то

$$\frac{cx}{a} + a < 0, \quad \frac{cx}{a} - a < 0.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= -\left(\frac{cx}{a} + a\right) \\ r_2 &= -\left(\frac{cx}{a} - a\right) \end{aligned} \right\}, \text{ если } x \leq -a. \quad (7.12)$$

Таким образом, если $x \geq a$, то $r_1 - r_2 = 2a$; если $x \leq -a$, то $r_2 - r_1 = 2a$, и в любом случае $|r_1 - r_2| = 2a$.

Теперь доказано, что уравнение (7.10) есть уравнение гиперболы. Заметим, что формулы (7.11), (7.12) представляют большой самостоятельный интерес.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7.10)$$

называется **каноническим уравнением гиперболы.**

Так как это уравнение второй степени, гипербола представляет собой кривую второго порядка.

Теперь исследуем форму гиперболы по ее каноническому уравнению.

Такими же рассуждениями, как и в случае эллипса, мы получаем, что координатные оси Ox и Oy являются осями симметрии гиперболы, заданной уравнением (7.10), а начало координат — ее центр симметрии.

Из уравнения (7.10) следует, что $|x| \geq a$, т. е. полоса декартовой плоскости, которая задается неравенством $|x| < a$, не содержит точек гиперболы.

Кроме того, поскольку для координат точек гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \geq 0$, получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} \geq \frac{y^2}{b^2}, \quad \text{или} \quad |y| \leq \frac{b}{a}|x|.$$

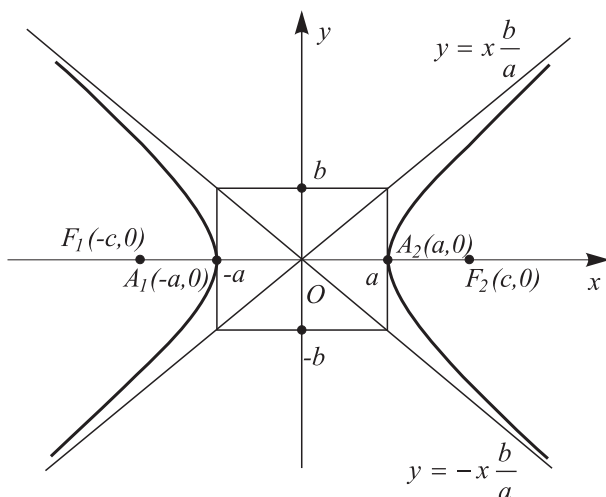


Рис. 7.4.

Следовательно, гипербола расположена между прямыми $y = (b/a)x$ и $y = -(b/a)x$ (см. рис. 7.4).

Ось симметрии гиперболы Oy ее не пересекает и потому называется **мнимой осью гиперболы**. Ось Ox пересекает гиперболу в двух точках $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$. Эта ось называется **действительной осью гиперболы**, а точки A_1 и A_2 — **вершинами гиперболы**.

Числа a и b в каноническом уравнении гиперболы (7.10) называются соответственно ее **действительной** и **мнимой** полуосями.

Разрешая уравнение (7.10) относительно y и считая, что $y \geq 0$, $x \geq a$, получаем:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (7.13)$$

График этой функции представляет собой множество точек гиперболы, расположенных в первом квадранте (рис. 7.5).

Из уравнения графика функции следует, что y на полуоси $[a, +\infty)$ есть возрастающая функция, причем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty.$$

Кроме того, легко заметить, что график имеет наклонную асимптоту $y = k_1x + k_0$. Найдём эту асимптоту по правилам, известным из

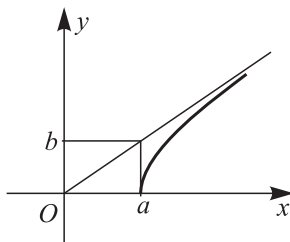


Рис. 7.5.

курса математического анализа:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a}.$$

$$k_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [y(x) - k_1 x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x \right] =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0,$$

Таким образом, $y = (b/a)x$ — уравнение наклонной асимптоты к графику функции (7.13).

Из соображений, связанных с установленными выше свойствами симметрии, вытекает, что **прямые** $y = \pm(b/a)x$ **являются асимптотами гиперболы**¹.

Замечание к вопросу об асимптотах

При исследовании плоских кривых вопрос об их асимптотах является одним из основных. Упомянем способ для нахождения асимптот алгебраических кривых, т. е. кривых, заданных неявным уравнением $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен от переменных x и y .

Чтобы найти уравнение наклонных асимптот $y = kx + b$ алгебраической кривой $F(x, y) = 0$, надо заменить в уравнении кривой y на $kx + b$, после чего приравнять в полученном уравнении к нулю коэффициенты при двух высших степенях x .

Решения полученной системы дадут значения угловых коэффициентов и свободных членов в искомым уравнениях асимптот.

Найдем, например, уравнение асимптот декартова листа, задаваемого уравнением $x^3 + y^3 = 3xy$ (см. пример 1.3).

Заменяя в уравнении y на $kx + b$, получим:

$$x^3 + (kx + b)^3 = 3x(kx + b),$$

¹ Термин «асимптота» (от греческого слова asymptote — «не сливающаяся») введен Аполлономием.

или $x^3 + k^3x^3 + 3k^2x^2b + 3kxb^2 + b^3 = 3kx^2 + 3bx$.

После приведения подобных членов получаем:

$$(1 + k^3)x^3 + (3k^2b - 3k)x^2 + (3k - 3b)x + b^3 = 0.$$

Система уравнений, определяющая k и b , имеет вид:

$$\begin{cases} 1 + k^3 = 0 \\ 3k^2b - 3k = 0. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение $k = -1$, $b = -1$.

Итак, $y = -x - 1$ — уравнение единственной асимптоты декартова листа.

Проведенное исследование дает достаточно ясное представление о форме гиперболы (рис. 7.4).

Отношение расстояния от центра гиперболы до ее фокуса к действительной полуоси гиперболы называется ее **эксцентриситетом** и обозначается буквой ε : $\varepsilon = c/a$.

Эксцентриситет гиперболы больше 1, т.к. $0 < a < c$ и, следовательно, $c/a > 1$.

Формулы (7.11) можно теперь переписать так:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \varepsilon x + a \\ r_2 &= \varepsilon x - a \end{aligned} \right\}, \text{ если } x \geq a.$$

а формулы (7.12) так:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= -(\varepsilon x + a) \\ r_2 &= -(\varepsilon x - a) \end{aligned} \right\}, \text{ если } x \leq -a.$$

Эти четыре формулы можно объединить в две:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= |\varepsilon x + a| \\ r_2 &= |\varepsilon x - a| \end{aligned} \right\}, \text{ где } |x| \geq a. \quad (7.14)$$

Уравнения (7.14) называются **фокальными уравнениями гиперболы**.

7.3. Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки этой плоскости, называемой **фокусом**, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой той же плоскости, называемой **директрисой**. При этом считается, что директриса не

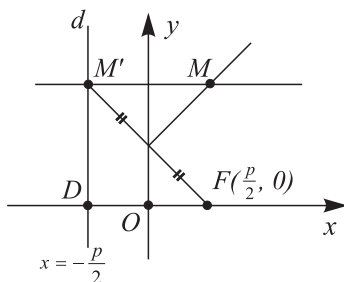


Рис. 7.6.

проходит через фокус. Расстояние от фокуса параболы до ее директрисы называется параметром параболы.

Опустим из фокуса F параболы перпендикуляр на директрису d . Пусть точка D — основание этого перпендикуляра.

Составим уравнение параболы, выбрав д. с. к. Oxy следующим образом. Ось Ox пусть совпадает с прямой DF и направлена от D к F . Начало координат O пусть совпадает с серединой отрезка DF . Направление оси Oy , перпендикулярной оси Ox в точке O , выберем произвольно (рис. 7.6). Параметр параболы обозначим буквой p . В выбранной системе координат фокус F имеет координаты $(p/2, 0)$, а директриса задается уравнением

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Обозначим через $r = FM$ расстояние от этой точки до фокуса и через $m = MM'$ — расстояние от нее же до директрисы d .

Точка $M(x, y)$ принадлежит параболе в том и только том случае, когда

$$r = m.$$

Так как

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad \text{и} \quad m = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

уравнение параболы имеет вид:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \quad (7.15)$$

Преобразуем уравнение (7.15), возведя обе части равенства в квадрат, раскрывая скобки и приводя подобные члены:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

$$y^2 = 2px. \quad (7.16)$$

Итак, координаты (x, y) точки M параболы удовлетворяют уравнению (7.16). Обратно, если точка $M(x, y)$ такова, что ее координаты удовлетворяют уравнению (7.16), то они удовлетворяют предыдущему уравнению, а, значит, и уравнению (7.15). Следовательно, $r = m$, т. е. точка принадлежит параболе.

Таким образом, уравнение (7.16) является уравнением параболы, которое называется **каноническим** ее уравнением.

Исследуем форму параболы по ее каноническому уравнению. Точка $M(x, y)$ принадлежит параболе в том и только том случае, когда параболе принадлежит точка $M'(x, -y)$, так как ордината y входит в каноническое уравнение параболы во второй степени. Это означает, что **ось Ox является осью симметрии параболы.**

Точка пересечения параболы с ее осью симметрии называется **вершиной параболы**. В нашей д. с. к. координаты вершины $(0, 0)$.

Из уравнения (7.16) следует, что $x \geq 0$ (т. к. $p > 0$ и $x = y^2/2p$). Разрешим уравнение (7.16), считая, что $y \geq 0$. Мы получаем:

$$y = \sqrt{2px}.$$

График этой функции совпадает с частью параболы, расположенной в полуплоскости $y \geq 0$.

Отметим, что y есть возрастающая функция от x и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty.$$

Сделанные замечания дают представление о форме параболы (см. рис. 7.7).

Уравнение $y^2 = -2px$ ($p > 0$) сводится к уравнению $y^2 = 2px$ путем замены системы координат, которая соответствует изменению направления оси Ox на противоположное (рис. 7.8).

Аналогично, каждое из уравнений $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$ ($p > 0$) определяет параболу с вершиной в начале координат и осью симметрии Oy . Такие параболы изображены на рис. 7.9 и 7.10 соответственно.

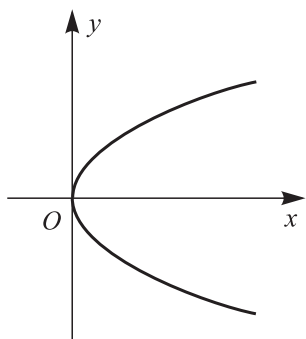


Рис. 7.7.

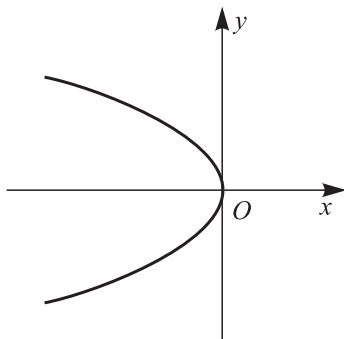


Рис. 7.8.

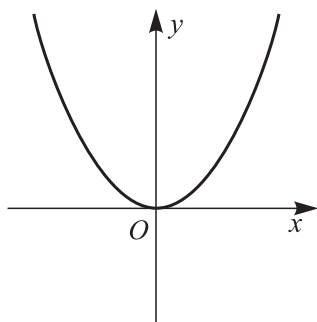


Рис. 7.9.

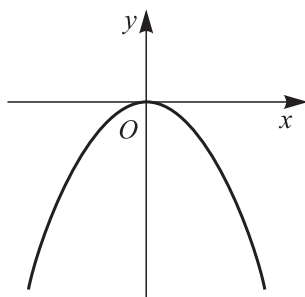


Рис. 7.10.

ГЛАВА 8. КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

8.1. Преобразования координат при параллельном переносе и повороте системы координат

Пусть в некоторой декартовой системе координат точка M имеет координаты (x, y) , а в другой д. с. к. та же точка имеет координаты (x_1, y_1) . Сейчас мы выясним, как, зная координаты точки в одной д. с. к., определить ее координаты в другой системе.

Займемся сначала вопросом об изменении координат точки **при параллельном переносе осей д. с. к.**

Пусть дана д. с. к. с осями Ox и Oy и в ней точка $M(x, y)$. Перенесем начало координат в точку $O_1(a, b)$, не изменяя направлений осей (рис. 8.1).

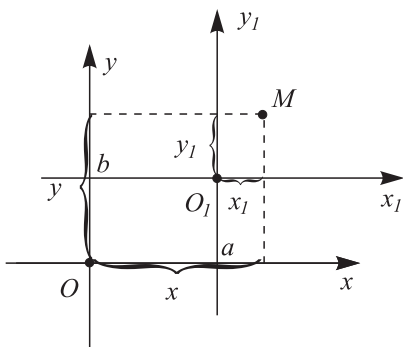


Рис. 8.1.

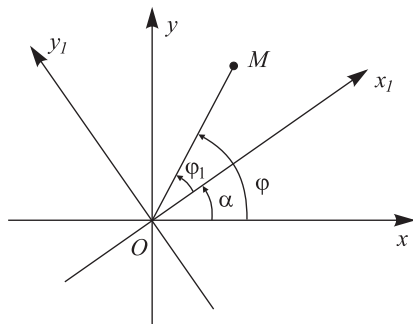


Рис. 8.2.

Получим новую систему координат с осями Ox_1 и Oy_1 . Найдем координаты x_1, y_1 точки M в этой системе.

Из векторного равенства $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$ мы получаем: $x = a + x_1$; $y = b + y_1$. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + a \\ y &= y_1 + b \end{aligned} \right\}, \quad (8.1)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x - a \\ y_1 &= y - b \end{aligned} \right\}. \quad (8.2)$$

Формулы (8.1) служат для нахождения старых координат точки по ее новым координатам, а формулы (8.2) — для нахождения новых координат по старым.

Изучим теперь, как изменяются координаты точки **при повороте осей д. с. к.**

Пусть новые координатные оси Ox_1 и Oy_1 получены путем поворота старых осей Ox и Oy на один и тот же угол α с центром вращения в начале координат (рис. 8.2).

Координаты точки M в д. с. к. Oxy обозначим (x, y) , а в системе Ox_1y_1 — (x_1, y_1) . Пусть φ — полярный угол точки M в полярных координатах с полярной осью Ox , а φ_1 — полярный угол точки M в полярных координатах с полярной осью Ox_1 . Ясно, что значения этих полярных углов мы можем выбрать так, что $\varphi = \alpha + \varphi_1$ (см. рис. 8.2).

Тогда согласно формулам (1.8):

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi = \rho \cos(\alpha + \varphi_1) = \rho \cos \alpha \cdot \cos \varphi_1 - \rho \sin \alpha \cdot \sin \varphi_1; \\y &= \rho \sin \varphi = \rho \sin(\alpha + \varphi_1) = \rho \sin \alpha \cdot \cos \varphi_1 + \rho \cos \alpha \cdot \sin \varphi_1.\end{aligned}$$

Здесь ρ — полярный радиус точки M , одинаковый в обеих полярных системах координат. Следовательно, $\rho \cos \varphi_1 = x_1$ и $\rho \sin \varphi_1 = y_1$.

Таким образом, мы находим выражение старых декартовых координат точки M через ее новые декартовы координаты:

$$\left. \begin{aligned}x &= x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\y &= x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha.\end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Аналогично, используя равенство $\varphi_1 = \varphi - \alpha$ и соотношения

$$\begin{aligned}x_1 &= \rho \cos \varphi_1 = \rho \cos(\varphi - \alpha) = \rho \cos \alpha \cdot \cos \varphi + \rho \sin \alpha \cdot \sin \varphi; \\y_1 &= \rho \sin \varphi_1 = \rho \sin(\varphi - \alpha) = -\rho \sin \alpha \cdot \cos \varphi + \rho \cos \alpha \cdot \sin \varphi,\end{aligned}$$

мы, с учетом того, что $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получаем выражение новых координат точки $M(x_1, y_1)$ через ее старые координаты (x, y) :

$$\left. \begin{aligned}x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\y_1 &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha.\end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Пусть, наконец, новая система координат $O_1x_1y_1$ получается из д. с. к. Oxy переносом осей координат в точку $O_1(a, b)$ с последующим поворотом осей на угол α (рис. 8.3). Решим задачу о нахождении соотношений между старыми и новыми координатами точки M .

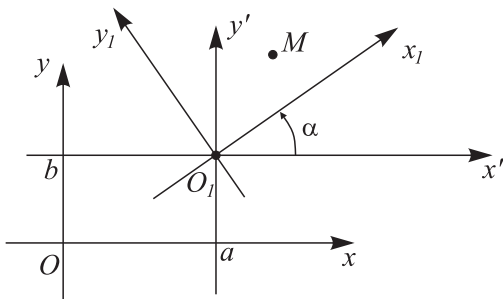


Рис. 8.3.

Итак, обозначим координаты нового начала O_1 (в старой системе координат) через (a, b) , угол поворота осей координат через α , координаты точки M в системе Oxy через (x, y) , а координаты той же точки в системе $O_1x_1y_1$ через (x_1, y_1) .

Введем в рассмотрение еще одну систему координат с началом в точке O_1 и осями O_1x' , O_1y' того же направления, что и оси Ox и Oy соответственно.

Обозначим через (x', y') координаты точки M в этой системе координат. Тогда согласно формулам (8.1) и (8.2)

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned} \right\}, \quad (8.5)$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned} \right\}. \quad (8.6)$$

Согласно формулам (8.3) и (8.4)

$$\left. \begin{aligned} x' &= x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\ y' &= x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{aligned} \right\}, \quad (8.7)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y_1 &= -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (8.8)$$

Теперь, заменяя x' и y' в (8.5) на их выражения через x_1 и y_1 с помощью (8.7), имеем:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha + a \\ y &= x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha + b \end{aligned} \right\}. \quad (8.9)$$

Аналогично, заменяя x' и y' в (8.8) на их выражения через x и y с помощью (8.6), получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \cos \alpha \cdot (x - a) + \sin \alpha \cdot (y - b) \\ y_1 &= -\sin \alpha \cdot (x - a) + \cos \alpha \cdot (y - b) \end{aligned} \right\}. \quad (8.10)$$

Итак, формулы (8.9) дают выражения старых координат точки M через новые, а формулы (8.10) — выражения новых координат этой точки через старые.

Теперь мы возвращаемся к теории кривых второго порядка на плоскости. Примеры таких кривых (эллипс, гипербола и парабола) были рассмотрены в предыдущей главе.

8.2. Классификация кривых второго порядка

Кривой второго порядка называется множество точек плоскости, координаты которых в некоторой д. с. к. Oxy удовлетворяют уравнению вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + H = 0 \quad (8.11)$$

при условии, что хотя бы один из коэффициентов A, B или C отличен от нуля.

Заметим, что буквы B, D и E обозначают **половины** коэффициентов при xy , x и y соответственно.

Определение кривой второго порядка не зависит от выбора д. с. к., так как координаты точки в другой д. с. к. $O_1x_1y_1$ линейно выражаются через ее коэффициенты в системе Oxy и, таким образом, в любой другой д. с. к. уравнение будет иметь тот же вид:

$$A_1x_1^2 + 2B_1x_1y_1 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + H_1 = 0. \quad (8.11)_1$$

Теперь мы ответим на вопрос о том, что может представлять собой геометрически кривая второго порядка. Для этого естественно попытаться найти д. с. к., в которой уравнение кривой второго порядка имеет простейший вид.

Схема последовательности наших действий такова. Сначала с помощью подходящего поворота осей мы найдем д. с. к. Ox_1y_1 , в которой уравнение кривой не будет содержать члена, составленного из произведения различных координат: x_1y_1 . Затем, выделяя полные квадраты по переменным x_1 и y_1 , мы определим параллельный перенос д. с. к.

Ox_1y_1 , который приведет нас к д. с. к. $O_2x_2y_2$; в ней уравнение кривой будет иметь **канонический** (простейший) вид¹.

1. Исключение слагаемого $2Bxy$ с помощью поворота системы координат. Итак, пусть д. с. к. Ox_1y_1 получена из д. с. к. Oxy поворотом осей на угол α . Координаты точки в этих двух системах связаны тогда, как мы знаем, соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\ y &= x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (8.3)$$

Следовательно, уравнение кривой $(8.11)_1$ получается из уравнения кривой (8.11) подстановкой в последнее уравнение выражений старых координат (x, y) через новые с помощью формул (8.3) .

Совершив эту подстановку, мы замечаем, что для коэффициента $2B_1$ при произведении новых координат x_1y_1 мы имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned} 2B_1 &= 2C \sin \alpha \cos \alpha - 2A \cos \alpha \sin \alpha + 2B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \\ &= (C - A) \sin 2\alpha + 2B \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Ясно, что всегда можно выбрать угол α так, чтобы коэффициент $2B_1$ был равен нулю. Для этого достаточно совершить поворот осей первоначальной системы координат на угол α , удовлетворяющий одному из условий:

$$B \sin^2 \alpha + (A - C) \sin \alpha \cos \alpha - B \cos^2 \alpha = 0$$

или

$$(C - A) \sin 2\alpha + 2B \cos 2\alpha = 0.$$

Первое условие приводит к уравнению для тангенса угла поворота²:

$$B \operatorname{tg}^2 \alpha + (A - C) \operatorname{tg} \alpha - B = 0,$$

а второе — к выражению для тангенса двойного угла³:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}. \quad (8.12)$$

¹ Канонические уравнения кривых второго порядка в современном виде появились у Г. Ламе (1818 г.).

² Квадратное уравнение $\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{A-C}{B} \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0$ дал в 1801 г. Лефрансе.

³ Формулу $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}$ нашел Био.

(Отметим, что при $A = C$ величина $\frac{2B}{A-C}$ «обращается в бесконечность»; в этом случае $2\alpha = \pm\pi/2$, т. е. $\alpha = \pm\pi/4$.)

Повернув оси координат на такой угол α , мы получаем д. с. к. Ox_1y_1 , в которой уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + H_1 = 0 \quad (H_1 = H). \quad (8.11)_2$$

2. Дальнейшее приведение уравнения к простейшему виду посредством параллельного переноса системы координат. Продолжая исследование, мы будем различать два случая.

Случай I: в уравнении $(8.11)_2$ оба коэффициента A_1 и C_1 отличны от нуля.

Случай II: один из коэффициентов A_1 или C_1 равен нулю.

В случае I переходим к новой системе координат

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + \frac{D_1}{A_1} \\ y_2 &= y_1 + \frac{E_1}{C_1} \end{aligned} \right\},$$

совершая, таким образом, параллельный перенос осей д. с. к. Ox_1y_1 в новое начало $O_2(-D_1/A_1, -E_1/C_1)$, координаты которого указаны также в системе Ox_1y_1 .

В результате уравнение $(8.11)_2$ приобретает вид:

$$A_1x_2^2 + C_1y_2^2 + H_2 = 0. \quad (8.11)_3$$

Здесь различаются следующие подслучаи.

I₁: $H_2 \neq 0$, знаки A_1 и C_1 одинаковы и противоположны знаку H_2 . В этом случае кривая представляет собой эллипс.

I₂: $H_2 \neq 0$, знаки A_1 и C_1 противоположны. Кривая — гипербола.

I₃: $H_2 \neq 0$, знаки A_1, C_1 и H_2 одинаковы. Уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки. Кривая называется **мнимой**.

I₄: $H_2 = 0$, знаки A_1 и C_1 противоположны. Кривая распадается на пару прямых, так как уравнение $(8.11)_3$ можно записать в следующем виде:

$$\left(x_2 - \sqrt{-\frac{C_1}{A_1}}y_2\right)\left(x_2 + \sqrt{-\frac{C_1}{A_1}}y_2\right) = 0.$$

I₅: $H_2 = 0$, знаки A_1 и C_1 одинаковы. Уравнение $(8.11)_3$ можно записать в виде:

$$\left(x_2 - i\sqrt{\frac{C_1}{A_1}}y_2\right)\left(x_2 + i\sqrt{\frac{C_1}{A_1}}y_2\right) = 0.$$

Кривая распадается на пару «мнимых прямых», пересекающихся в вещественной точке $x_2 = 0, y_2 = 0$.

Случай II. Не ограничивая общности, будем считать, что $A_1 = 0$, т. е. уравнение $(8.11)_2$ имеет вид:

$$C_1 y_1^2 + 2D_1 x_1 + 2E_1 y + H_1 = 0. \quad (8.11)_4$$

Тогда переходим к новой системе координат

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 \\ y_2 &= y_1 + \frac{E_1}{C_1} \end{aligned} \right\},$$

в которой уравнение кривой приобретает вид:

$$2D_1 x_2 + C_1 y_2^2 + H_3 = 0. \quad (8.11)_5$$

Теперь мы различаем следующие подслучаи.

II₁: $D_1 \neq 0$. Кривая — парабола, что очевидно, если перейти к новым координатам:

$$\left\{ \begin{aligned} x_3 &= x_2 + \frac{H_3}{2D_1} \\ y_3 &= y_2, \end{aligned} \right.$$

в которых уравнение кривой имеет вид:

$$2D_1 x_3 + C_1 y_3^2 = 0.$$

II₂: $D_1 = 0$; C_1 и H_3 противоположных знаков. Кривая распадается на пару параллельных прямых:

$$y = \pm \sqrt{-\frac{H_3}{C_1}}.$$

II₃: $D_1 = 0$; C_1 и H_3 одного знака. Кривая распадается на пару «мнимых» непересекающихся прямых:

$$y = \pm i \sqrt{\frac{H_3}{C_1}}.$$

II₄: $D_1 = 0, H_3 = 0$. Кривая — пара совпадающих прямых: $y_2^2 = 0$.

Этим исчерпываются все геометрические образы, являющиеся кривыми второго порядка, и мы можем сделать окончательный вывод.

Кривая второго порядка может представлять собой эллипс (I₁), гиперболу (I₂), параболу (II₁), пару прямых, возможно, параллельных, а возможно, и совпадающих (I₄, II₂, II₄) или точку (I₅).

8.3. Примеры исследования кривых второго порядка

Здесь мы разберем примеры исследования кривой второго порядка приведением ее уравнения к каноническому виду.

Пример 8.1. Приведем к каноническому виду уравнение кривой второго порядка

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - x + 5y - 4 = 0. \quad (8.13)$$

Здесь $A = 2, B = -2, C = 5, D = -1/2, E = 5/2, H = -4$.

Для нахождения угла поворота д. с. к. согласно (8.12) находим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

Если угол 2α взять в первой четверти ($2\alpha \approx 53^\circ 10'; \alpha \approx 26^\circ 35'$), то согласно известным тригонометрическим формулам, получаем:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{3}{5}; \\ \sin \alpha &= \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \\ \cos \alpha &= \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Формулы (8.3) приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 \end{aligned} \right\}. \quad (8.15)$$

Подставляя (8.15) в (8.13), находим уравнение кривой в координатах (x_1, y_1) :

$$x_1^2 + 6y_1^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{11}{\sqrt{5}}y_1 - 4 = 0. \quad (8.16)$$

Теперь $A_1 = 1, B_1 = 0, C_1 = 6, D_1 = \frac{3}{2\sqrt{5}}, E_1 = \frac{11}{2\sqrt{5}}, H_1 = -4$.

(Если взять угол 2α в третьей четверти ($2\alpha \approx 233^\circ 10', \alpha \approx 116^\circ 35'$), то аналогично получаем уравнение кривой

$$6x_1^2 + y_1^2 + \frac{11}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{3}{\sqrt{5}}y_1 - 4 = 0,$$

где $A_1 = 6, B_1 = 0, C_1 = 1, D_1 = \frac{11}{2\sqrt{5}}, E_1 = -\frac{3}{2\sqrt{5}}, H_1 = -4$.)

Выделяя в уравнении (8.16) полные квадраты по x_1 и y_1 , перепишем его в виде:

$$\left(x_1 + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y_1 + \frac{11}{12\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(\frac{11}{12\sqrt{5}}\right)^2 + 4,$$

или

$$\left(x_1 + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y_1 + \frac{11}{12\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{131}{24}. \quad (8.17)$$

Перейдем к новой системе координат с началом координат в точке $\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{11}{12\sqrt{5}}\right)$ по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ y_2 &= y_1 + \frac{11}{12\sqrt{5}} \end{aligned} \right\}. \quad (8.18)$$

Получаем:

$$x_2^2 + 6y_2^2 = \frac{131}{24},$$

или

$$\frac{x_2^2}{\left(\frac{131}{24}\right)} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{131}{144}\right)} = 1. \quad (8.19)$$

Итак, исследуемая кривая — эллипс с полуосями $a = \sqrt{\frac{131}{24}} \approx 2,3$ и $b = \sqrt{\frac{131}{144}} \approx 1,0$ (см. рис. 8.4).

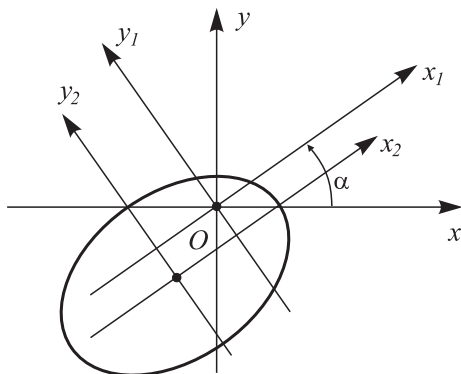


Рис. 8.4.

Центр эллипса находится в точке с координатами $x_2 = 0$, $y_2 = 0$. С помощью формул (8.18) определяем, что в промежуточной д. с. к. Ox_1y_1 он имеет координаты:

$$x_1 = -\frac{3}{2\sqrt{5}} \approx 0,7; \quad y_1 = -\frac{11}{12\sqrt{5}} \approx -0,4.$$

Наконец, координаты центра в первоначальной системе координат определим по формулам (8.15):

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(-\frac{3}{2\sqrt{5}} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{11}{12\sqrt{5}} \right) = -\frac{5}{12} \approx -0,4;$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{3}{2\sqrt{5}} \right) + \frac{2}{\sqrt{5}} \left(-\frac{11}{12\sqrt{5}} \right) = -\frac{2}{3} \approx -0,7.$$

Найдем теперь уравнения осей эллипса в первоначальной системе координат. В системе $O_2x_2y_2$ большая ось задается уравнением $y_2 = 0$. В системе Ox_1y_1 та же ось в силу второго из уравнений (8.18) представляется уравнением $y_1 = -\frac{11}{12\sqrt{5}}$.

Поскольку

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y \\ y_1 &= -\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \end{aligned} \right\},$$

подставляя второе соотношение в равенство $y_1 = -\frac{11}{12\sqrt{5}}$, получаем уравнение большой оси в д. с. к. Oxy :

$$12x - 24y - 11 = 0.$$

Аналогично, уравнение малой оси эллипса в системе Oxy имеет вид: $4x + 2y + 3 = 0$.

Пример 8.2. Приведем к каноническому виду уравнение кривой второго порядка

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0. \quad (8.20)$$

Имеем: $A = 1, B = 1, C = 1, D = 1, E = 1/2, H = 0$.

Так как $A = C$, в качестве угла поворота осей первоначальной д. с. к. мы можем взять угол $\alpha = \pi/4$.

Тогда, согласно формулам (8.3), получаем:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos \pi/4 - y_1 \sin \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1) \\ y &= x_1 \sin \pi/4 + y_1 \cos \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) \end{aligned} \right\}. \quad (8.21)$$

Подставляя выражения x и y через x_1 и y_1 согласно формулам (8.21) в уравнение кривой (8.20), получаем в д. с. к. Ox_1y_1 :

$$2x_1^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 = 0. \quad (8.22)$$

Здесь $A_1 = 2, B_1 = 0, C_1 = 0, D_1 = \frac{3}{2\sqrt{2}}, E_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, H_1 = 0$.

Разрешив это уравнение относительно y_1 , получаем уравнение параболы (см. рис. 8.5)

$$y_1 = 2\sqrt{2}x_1^2 + 3x_1.$$

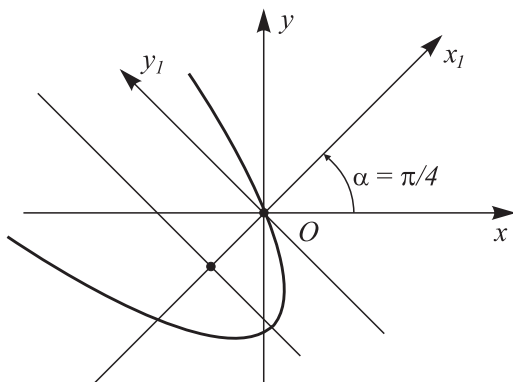


Рис. 8.5.

Координаты вершины параболы в д. с. к. Ox_1y_1 имеют значения

$$x_1 = -\frac{3}{4\sqrt{2}} \approx -0,5; \quad y_1 = -\frac{9}{8\sqrt{2}} \approx -0,8.$$

По формулам (8.21) находим координаты вершины в первоначальной д. с. к. Oxy :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{3}{4\sqrt{2}} + \frac{9}{8\sqrt{2}} \right) = \frac{3}{16} \approx 0,2; \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{9}{8\sqrt{2}} \right) = -\frac{15}{16} \approx -0,9. \end{aligned}$$

Наконец, найдем уравнение оси параболы в системе Oxy .

В системе Ox_1y_1 ось параболы задается уравнением $x_1 = -\frac{3}{4\sqrt{2}}$.

Поскольку

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) \end{aligned} \right\},$$

подставив первое из соотношений в уравнение $x_1 = -\frac{3}{4\sqrt{2}}$, получаем:
 $-\frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$, или $4x + 4y + 3 = 0$.

Итак, уравнение $4x + 4y + 3 = 0$ есть уравнение оси параболы в первоначальной системе координат.

Пример 8.3. Приведем к каноническому виду уравнение кривой второго порядка

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 + 8x - 8y - 17 = 0. \quad (8.23)$$

Так как $A = C$, мы можем выбрать угол поворота первоначальной д. с. к. $\alpha = -\pi/4$.

Тогда, согласно формулам (8.3),

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + y_1) \end{aligned} \right\}. \quad (8.24)$$

После подстановки в первоначальное уравнение кривой получаем ее уравнение в д. с. к. Ox_1y_1 :

$$4x_1^2 + 8\sqrt{2}x_1 - 17 = 0. \quad (8.25)$$

Разложив левую часть равенства (8.25) на множители, имеем:

$$4 \left(x_1 - \frac{5 - 2\sqrt{2}}{2} \right) \left(x_1 + \frac{5 + 2\sqrt{2}}{2} \right) = 0.$$

Таким образом, кривая представляет собой пару параллельных прямых (см. рис. 8.6):

$$x_1 = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{2}, \quad x_1 = -\frac{5 + 2\sqrt{2}}{2}. \quad (8.26)$$

Мы, наконец, можем найти уравнения этих прямых в первоначальной д. с. к., воспользовавшись формулами обратного перехода:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{aligned} \right\}.$$

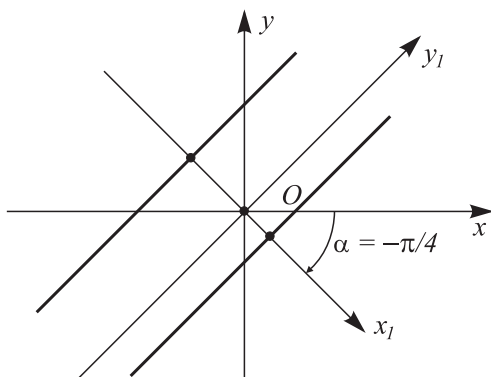


Рис. 8.6.

Подставляя последние формулы обратного перехода в уравнения (8.26), окончательно получаем:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 5 + 2\sqrt{2} &= 0; \\ \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 5 + 2\sqrt{2} &= 0.\end{aligned}\tag{8.27}$$

Это и есть уравнения пары параллельных прямых, на которые распалась кривая второго порядка (8.23).

ГЛАВА 9. ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

В этой главе мы рассмотрим поверхности в пространстве. Сначала будут введены три важных класса поверхностей: цилиндрические, конические и поверхности вращения. Затем мы рассмотрим без доказательства классификацию поверхностей второго порядка.

9.1. Цилиндрические поверхности

Пусть l — кривая в пространстве и $\vec{a}$ — ненулевой вектор.

Цилиндрической поверхностью в пространстве называется множество точек семейства параллельных прямых с направляющим вектором $\vec{a}$ и пересекающих кривую l .

Кривая l называется **направляющей** цилиндрической поверхности, а параллельные прямые, фигурирующие в определении, — **образующими** этой цилиндрической поверхности (рис. 9.1).

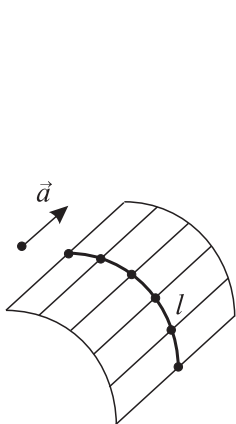


Рис. 9.1.

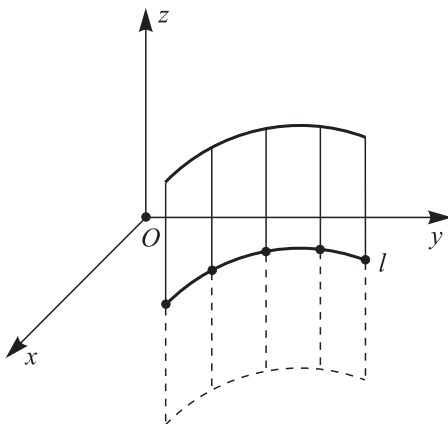


Рис. 9.2.

Рассмотрим сначала цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны одной из координатных осей (например, Oz), с направляющей, лежащей в координатной плоскости, перпендикулярной выбранной оси (Oxy).

Пусть $F(x, y) = 0$ — уравнение направляющей l цилиндрической поверхности в плоскости Oxy (рис. 9.2).

Тогда в пространстве тому же уравнению будут удовлетворять те и только те точки $M(x, y, z)$, проекция которых на плоскость Oxy принадлежит направляющей l , заданной в ней уравнением $F(x, y) = 0$, т.е. те и только те точки, которые лежат на вертикальных прямых, проходящих через точки направляющей.

Итак, уравнение $F(x, y) = 0$, которое не содержит z , определяет в пространстве цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz , и направляющей, которая в плоскости Oxy имеет то же уравнение $F(x, y) = 0$.

Аналогично, уравнения, не содержащие x или z , определяют цилиндрические поверхности:

$F(y, z) = 0$ — цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Ox .

$F(x, z) = 0$ — цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oy .

Теперь решим задачу о написании уравнения цилиндрической поверхности с образующими, имеющими постоянный направляющий вектор $\vec{a}(m, n, 1)$.

Примем за направляющую такой поверхности кривую, лежащую в координатной плоскости Oxy и заданную уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (9.1)$$

Возьмем произвольную точку в пространстве $M(x, y, z)$ и проведем через нее прямую с направляющим вектором $\vec{a}(m, n, 1)$. Пусть $N(x_0, y_0, 0)$ — точка пересечения этой прямой с координатной плоскостью Oxy . Из условия коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\overrightarrow{NM}$ имеем:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{1},$$

откуда $x_0 = x - mz$, $y_0 = y - nz$.

Для того, чтобы точка $M(x, y, z)$ принадлежала нашей цилиндрической поверхности, необходимо и достаточно, чтобы точка $N(x_0, y_0, 0)$ принадлежала направляющей, т.е. чтобы удовлетворялось соотношение $F(x_0, y_0) = 0$ (рис. 9.3).

Подставив найденные для x_0 и y_0 выражения через x, y и z в последнее соотношение, приходим к уравнению данной цилиндрической поверхности:

$$F(x - mz, y - nz) = 0. \quad (9.2)$$

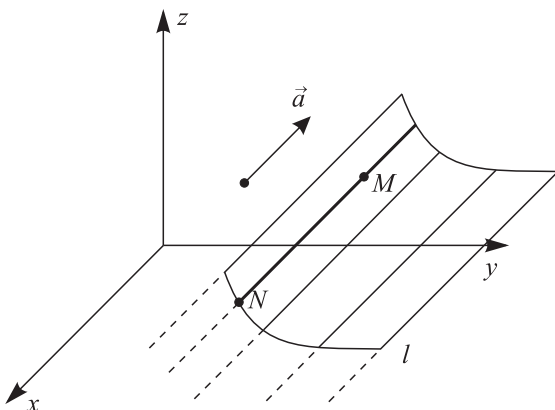


Рис. 9.3.

Пример 9.1. Пусть направляющей цилиндрической поверхности служит парабола

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ z = 0. \end{cases}$$

Тогда при направляющем векторе $\vec{a}(m, n, 1)$ для образующих уравнение соответствующей цилиндрической поверхности имеет вид:

$$(y - nz)^2 = 2p(x - mz).$$

9.2. Конические поверхности

Пусть O — точка в пространстве и l — кривая, не проходящая через эту точку.

Конической поверхностью в пространстве называется множество точек семейства прямых, проходящих через точку O и пересекающих кривую l .

Кривая l называется **направляющей** конической поверхности, а точка O — ее **вершиной** (рис. 9.4).

Выведем уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат $O(0, 0, 0)$ и с направляющей, заданной в плоскости $z = h$ ($h \neq 0$) уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= 0 \\ z &= h \end{aligned} \right\}. \quad (9.3)$$

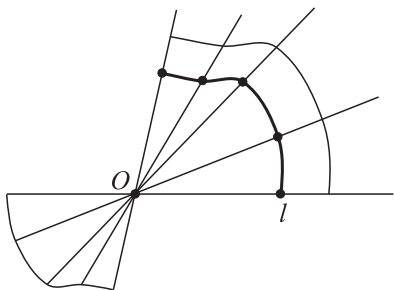


Рис. 9.4.

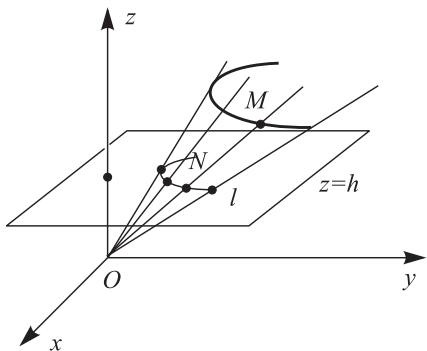


Рис. 9.5.

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка конической поверхности, отличная от вершины. Проведем через точку M и вершину O прямую OM . Пусть точка $N(x_0, y_0, h)$ — точка пересечения этой прямой с плоскостью $z = h$. Ввиду коллинеарности векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$:

$$\frac{x_0}{x} = \frac{y_0}{y} = \frac{h}{z},$$

откуда

$$x_0 = \frac{xh}{z}, \quad y_0 = \frac{yh}{z}.$$

Поскольку принадлежность точки $M(x, y, z)$ конической поверхности равносильна принадлежности точки $N(x_0, y_0, h)$ ее направляющей, т.е. выполнению соотношения $F(x_0, y_0) = 0$, после подстановки найденных выражений для x_0 и y_0 через x, y, z в это соотношение приходим к искомому уравнению конической поверхности:

$$F\left(\frac{xh}{z}, \frac{yh}{z}\right) = 0. \quad (9.4)$$

Пример 9.2. Пусть вершина конической поверхности находится в начале координат, а ее направляющая представляет собой эллипс:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases} \quad (c \neq 0).$$

Тогда уравнение конической поверхности имеет вид:

$$\frac{x^2 c^2}{a^2 z^2} + \frac{y^2 c^2}{b^2 z^2} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

9.3. Поверхности вращения

Пусть в некоторой плоскости выбрана кривая l и прямая l_1 . Опустим из точки N кривой l перпендикуляр NP на прямую l_1 и построим окружность с центром в точке P и радиусом NP , плоскость которой перпендикулярна прямой l_1 .

Множество всех точек всех окружностей, построенных указанным образом для всех точек кривой l , называется **поверхностью вращения**, полученной вращением кривой l вокруг оси вращения l_1 (рис. 9.6).

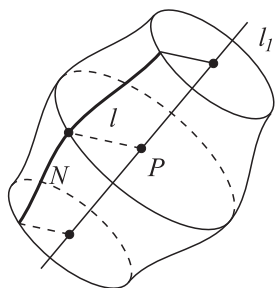


Рис. 9.6.

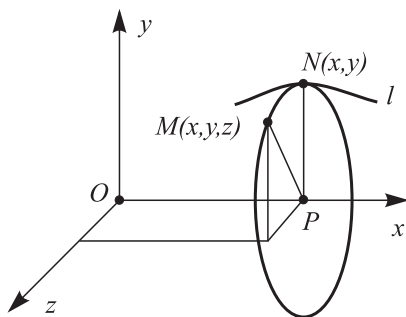


Рис. 9.7.

Сечения поверхности вращения полуплоскостями, ограниченными осью вращения, называются **меридианами**, а окружности, получающиеся при пересечении поверхности вращения плоскостями, перпендикулярными оси вращения, называются **параллелями** этой поверхности.

Пусть кривая l расположена в координатной плоскости Oxy , где задана уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

Примем ось Ox за ось вращения и выведем уравнение соответствующей поверхности вращения.

Рассмотрим на поверхности вращения точку $M(x, y, z)$, из которой опустим перпендикуляр MP на ось вращения Ox (рис. 9.7).

В плоскости Oxy восставим перпендикуляр к Ox в точке P , и пусть $N(x_0, y_0)$ — та точка пересечения этого перпендикуляра с кривой l , которая отстоит от оси Ox на том же расстоянии, что и точка M . В силу принадлежности точки $N(x_0, y_0)$ кривой l имеем:

$$F(x_0, y_0) = 0. \quad (9.5)$$

Однако $NP = |y_0|$ и $MP = \sqrt{y^2 + z^2}$. Следовательно, $|y_0| = \sqrt{y^2 + z^2}$, откуда $y_0 = \sqrt{y^2 + z^2}$ или $y_0 = -\sqrt{y^2 + z^2}$.

Так как точки M, N и P лежат в плоскости, параллельной координатной плоскости Oyz , $x = x_0$.

Таким образом, выполняется одно из соотношений:

$$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0, \quad \text{если} \quad y_0 = \sqrt{y^2 + z^2},$$

или

$$F(x, -\sqrt{y^2 + z^2}) = 0, \quad \text{если} \quad y_0 = -\sqrt{y^2 + z^2}.$$

Итак, если точка $M(x, y, z)$ принадлежит рассматриваемой поверхности вращения, то ее координаты удовлетворяют одному из уравнений:

$$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0 \quad \text{или} \quad F(x, -\sqrt{y^2 + z^2}) = 0. \quad (9.6)$$

Несложно доказать, что справедливо обратное утверждение: если координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют одному из уравнений (9.6), то она принадлежит нашей поверхности вращения.

Окончательно получаем, что искомое уравнение поверхности вращения таково:

$$F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0. \quad (9.7)$$

Пример 9.3. Рассмотрим в плоскости Oxy окружность, заданную уравнением

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2.$$

Поверхность вращения, полученная при вращении этой окружности вокруг оси Ox , имеет уравнение:

$$x^2 + (\pm\sqrt{y^2 + z^2} - b)^2 = a^2,$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2 = \pm 2b\sqrt{y^2 + z^2},$$

или

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 = 4b^2(y^2 + z^2).$$

Если $0 < a < b$, то эта поверхность называется тором и представляет собой поверхность «баранки» (рис. 9.8).

Теперь мы перейдем к рассмотрению поверхностей второго порядка, обращая особое внимание на изучение их формы с помощью сечений поверхностей плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

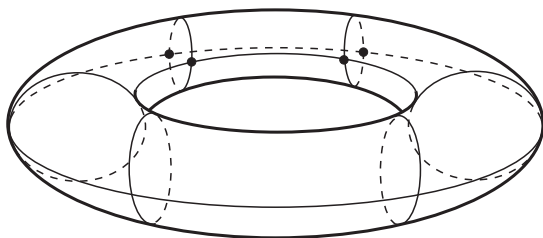


Рис. 9.8.

9.4. Примеры поверхностей второго порядка

Эллипсоид. Эллипсоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0. \quad (9.8)$$

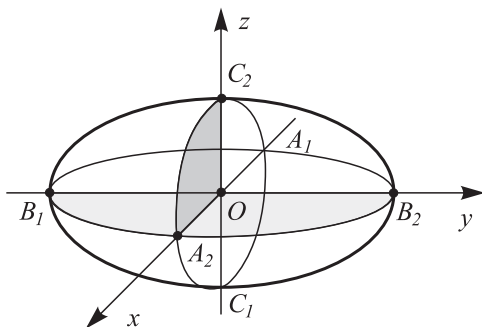


Рис. 9.9.

1) Полагая в уравнении эллипсоида (9.8) $z = 0$, находим сечение его плоскостью Oxy . Уравнения этого сечения, следовательно,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Это эллипс $A_1B_1A_2B_2$ с полуосями $OA_2 = a$, $OB_2 = b$ (рис. 9.9).

Аналогично находим сечения эллипсоида

2) плоскостью Oyz :

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

— эллипс $B_1C_1B_2C_2$ с полуосями b и c .

3) плоскостью Oxz :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

— эллипс $C_1A_1C_2A_2$ с полуосями a и c .

4) плоскостью $z = h$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$$

— эллипс с полуосями $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, если $|h| < c$. Пересечение с плоскостью $z = c$ имеет только одну точку $C_2(0, 0, c)$, как и с плоскостью $z = -c$ (это точка $C_1(0, 0, -c)$).

Если $|h| > c$, то эллипсоид и плоскость $z = h$ не пересекаются. Отрезки OA, OB и OC , как и их длины (a, b, c соответственно), называются полуосями эллипсоида.

При $a = b = c$ уравнение (9.8) определяет сферу¹ радиуса a . Каждая из координатных плоскостей является плоскостью симметрии эллипсоида, заданного каноническим уравнением, а начало координат — его центром симметрии.

Гиперболоиды.

I. Однополостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0). \quad (9.9)$$

Исследуем форму гиперболоида по его сечениям плоскостями.

1) Сечение плоскостью Oxy :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

¹ «Сфера» — в переводе с греческого — «мяч».

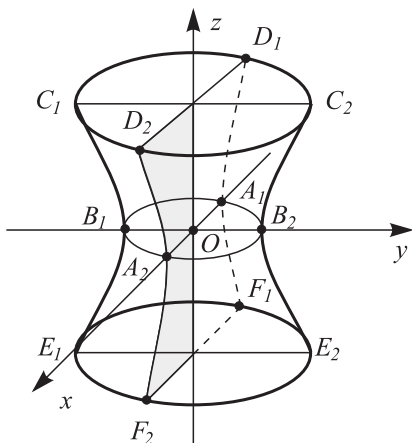


Рис. 9.10.

Это эллипс (рис. 9.10) с полуосями $OA_2 = a$, $OB_2 = b$.

2) Сечения плоскостями $z = \pm h$, параллельными координатной плоскости Oxy :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \\ z = \pm h \end{cases}$$

— это эллипсы (при любом h) с полуосями $OD_2 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ и $OC_2 = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$.

3) Сечение плоскостью Oyz :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

— гипербола с ветвями $F_1A_1D_1$ и $F_2A_2D_2$ и вещественной полуосью $OA_2 = a$.

При $a = b$ уравнение (9.9) определяет однополостный гиперboloид вращения, все горизонтальные сечения которого — окружности радиуса $a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$.

Каждая из координатных плоскостей является плоскостью симметрии однополостного гиперboloида, заданного каноническим уравнением (9.9), а начало координат — его центром симметрии.

II. Двуполостным гиперboloидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a, b, c > 0). \quad (9.10)$$

Исследуем форму двуполостного гиперboloида по его сечениям плоскостями.

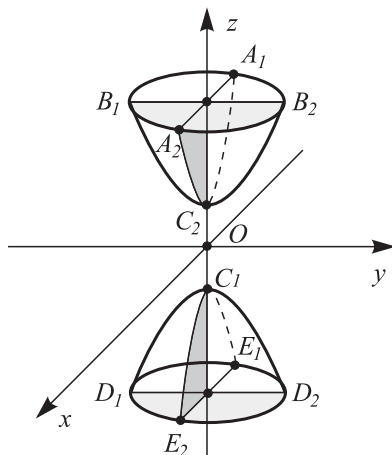


Рис. 9.11.

1) Плоскостью Oxy :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Плоскость Oxy не пересекает данную поверхность.

2) Плоскостями $z = \pm h$ при $h > c$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \\ z = \pm h \end{cases}$$

— эллипсы $A_1B_1A_2B_2$ и $E_1D_1E_2D_2$ с полуосями $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ и $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$.

Сечение поверхностей каждой из плоскостей $z = \pm c$ состоит из одной точки $C_1(0, 0, -c)$ и $C_2(0, 0, c)$ соответственно.

3) Плоскостью Oyz :

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

— гипербола с ветвями $B_1C_2B_2$ и $D_1C_1D_2$; ее вещественная полуось равна c , а мнимая — b .

4) Плоскостью Oxz :

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

— гипербола с ветвями $A_1C_2A_2$ и $E_1C_1E_2$; ее вещественная полуось равна c , а мнимая — a .

При $a = b$ уравнение (9.10) определяет двуполостный гиперboloид вращения, горизонтальные сечения которого — окружности радиуса $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ (при $|h| > c$).

Каждая из координатных плоскостей является плоскостью симметрии двуполостного гиперboloида, заданного уравнением (9.10), а начало координат — его центром симметрии.

Параболоиды.

I. Эллиптическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (pq > 0). \quad (9.11)$$

Считая для определенности, что $p > 0$ и $q > 0$, исследуем форму эллиптического параболоида по его сечениям плоскостями.

1) Плоскостью Oxy :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

— точка $O(0, 0, 0)$.

2) Плоскостью $z = h > 0$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1 \\ z = h \end{cases}$$

— эллипс $A_1B_1A_2B_2$ с полуосями $\sqrt{2ph}$ и $\sqrt{2qh}$.

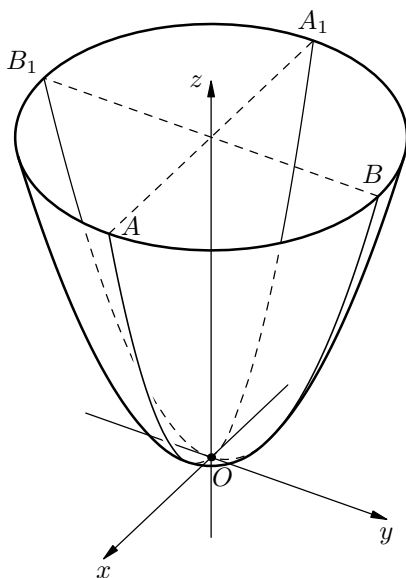


Рис. 9.12.

3) Плоскостью Oyz :

$$\begin{cases} y^2 = 2qz \\ x = 0 \end{cases}$$

— парабола B_1OB .

4) Плоскостью Oxz :

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$$

— парабола A_1OA .

При $p = q$ уравнение (9.11) определяет параболоид вращения

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

все горизонтальные сечения которого плоскостями $z = h > 0$ — окружности радиуса $\sqrt{2ph}$.

Координатные плоскости Oxz и Oyz являются плоскостями симметрии эллиптического параболоида, заданного каноническим уравнением (9.11). Центра симметрии эта поверхность не имеет.

II. Гиперболическим параболоидом или седлом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (pq > 0). \quad (9.12)$$

Исследуем форму гиперболического параболоида, считая для определенности, что $p > 0$, $q > 0$.

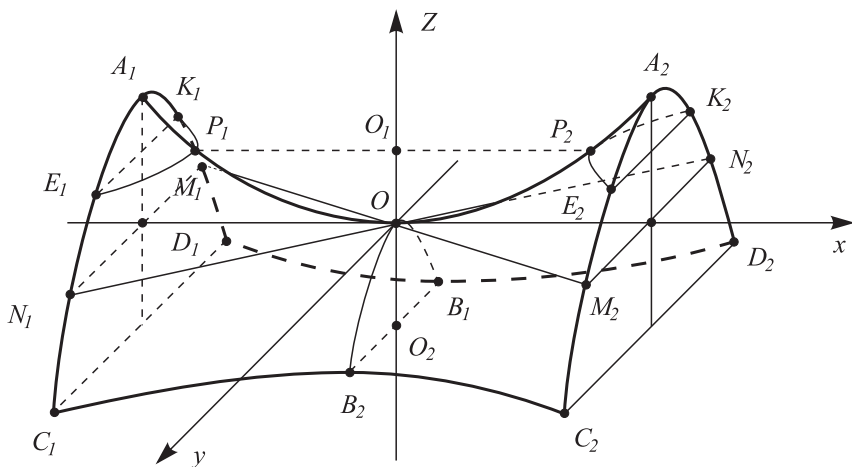


Рис. 9.13.

Рассмотрим сечения гиперболического параболоида

1) Плоскостью Oxz :

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$$

— парабола A_1OA_2 (см. рис. 9.13).

2) Плоскостью Oyz :

$$\begin{cases} y^2 = -2qz \\ x = 0 \end{cases}$$

— парабола B_1OB_2 . Ветви этой параболы обращены вниз.

3) Плоскостями $x = \pm h$:

$$\begin{cases} z = -\frac{y^2}{2q} + \frac{h^2}{2p} \\ x = \pm h \end{cases}$$

— параболы $C_1A_1D_1$ и $C_2A_2D_2$, которые получаются параллельным переносом параболы B_1OB_2 .

Отсюда мы можем заключить, что гиперболический параболоид образуется при параллельном сдвиге параболы B_1OB_2 , когда ее вершина скользит по параболе A_1OA_2 . Отметим, что гиперболический параболоид может быть также получен при параллельном сдвиге параболы A_1OA_2 , когда ее вершина скользит по параболе B_1OB_2 . (Аналогичная ситуация имеет место и для эллиптического параболоида.)

4) Плоскостью Oxy :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = \pm \sqrt{\frac{q}{p}} x \\ z = 0 \end{cases}$$

— пара прямых M_1OM_2 и N_1ON_2 .

5) Плоскостью $z = l > 0$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2pl} - \frac{y^2}{2ql} = 1 \\ z = l \end{cases}$$

— гипербола с ветвями $K_1P_1E_1$ и $K_2P_2E_2$. Ее вещественная полуось $O_1P_2 = \sqrt{2pl}$.

6) Плоскостью $z = -m < 0$:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{2qm} - \frac{x^2}{2pm} = 1 \\ z = -m \end{cases}$$

— гипербола с ветвями $D_1B_1D_2$ и $C_1B_2C_2$ с вещественной полуосью $O_2B_2 = \sqrt{2qm}$.

Координатные плоскости Oxz и Oyz являются плоскостями симметрии гиперболического параболоида. Центра симметрии эта поверхность не имеет.

Конусы и цилиндры второго порядка. Эти поверхности представляют собой частные случаи конических и цилиндрических поверхностей, которые были рассмотрены в начале этой темы.

Конусом¹ второго порядка называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{9.13}$$

¹ «Конус» — в буквальном переводе с греческого — «сосновая шишка».

(см. пример 9.2).

Эта поверхность изображена на рис. 9.14.

Конус (9.13) тесно связан с рассмотренными ранее однополостным и двуполостным гиперболоидами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1,$$

для которых он является **асимптотическим конусом** (рис. 9.15).

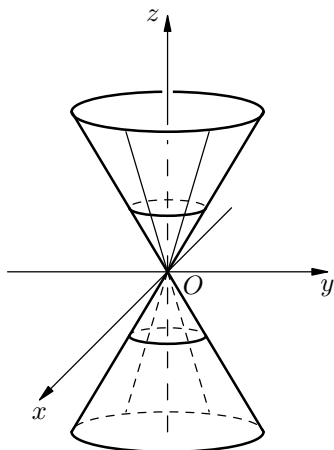


Рис. 9.14.

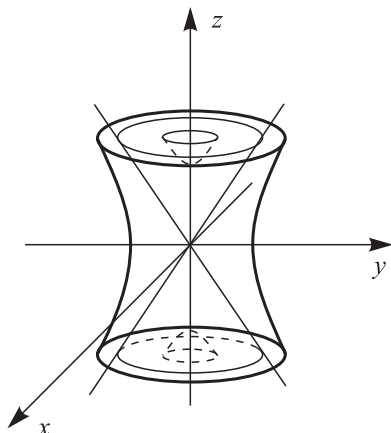


Рис. 9.15.

Это означает, что по отношению к этим гиперболоидам конус (9.13) играет такую же роль, какую асимптоты играют по отношению к гиперболе.

Цилиндрами второго порядка называются цилиндрические поверхности, канонические уравнения которых имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \quad \text{эллиптический цилиндр}, \quad (9.14)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \quad \text{гиперболический цилиндр}, \quad (9.15)$$

$$\frac{x^2}{a^2} = py \quad - \quad \text{параболический цилиндр}. \quad (9.16)$$

Эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры¹ изображены соответственно на рис. 9.16–9.18.

¹ «Цилиндр» — буквальный перевод с греческого — «валик».

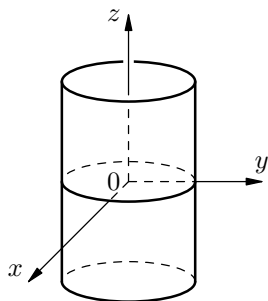


Рис. 9.16.

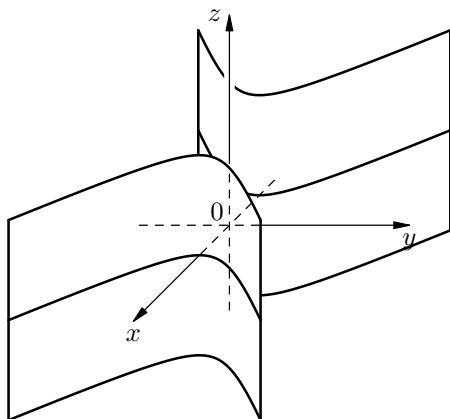


Рис. 9.17.

9.5. Классификация поверхностей второго порядка

Теперь сделаем несколько общих замечаний. **Поверхностью второго порядка называется множество точек в пространстве, координаты которых в некоторой д. с. к. $Oxyz$ удовлетворяют уравнению вида:**

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx + Kx + Ly + Mz + H = 0, \quad (9.17)$$

причем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

а) Левая часть уравнения (9.17) при некоторых условиях может быть **разложена на линейные множители** и тогда уравнение (9.17) определяет пару плоскостей, которые могут быть параллельны или даже сливаться в одну плоскость.

б) Иногда уравнение (9.17) может определять одну точку, например:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

в) Иногда уравнение (9.17) вообще не определяет точек в пространстве и задает **мнимую поверхность**. Например:

$$x^2 + y^2 + z^2 = -1.$$

Назовем случаи а), б) и в) **особыми**.

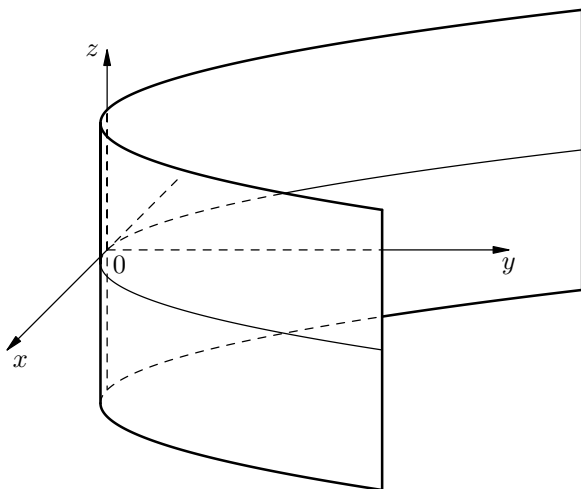


Рис. 9.18.

Можно показать, что уравнение (9.17) определяет одну из девяти рассмотренных выше поверхностей второго порядка, если исключить особые случаи¹. Итак, за исключением особых случаев, уравнение (9.17) приводится к одному из рассмотренных выше девяти канонических уравнений.

Суммируем сказанное в следующей классификационной таблице, отделив поверхности второго порядка, имеющие центр симметрии (**центральные поверхности**), от остальных.

І. Центральные поверхности.

- 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид (рис. 9.9).
- 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — однополостный гиперboloид² (рис. 9.10).
- 3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ — двуполостный гиперboloид (рис. 9.11).

¹ Поверхности второго порядка в основном были изучены в первой половине XVII в. Первое систематическое изложение вопроса дал Л. Эйлер во втором томе «Введение в анализ бесконечно малых» (1748 г.). В частности, он открыл и подробно исследовал гиперболический параболоид, который назвал «параболически-гиперболической поверхностью».

² Названия поверхностей «эллипсоид» и «гиперboloид» введены Г. Монжем.

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ — конус второго порядка (рис. 9.14).

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — эллиптический цилиндр (рис. 9.16).

6) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — гиперболический цилиндр (рис. 9.17).

II. Поверхности второго порядка, не имеющие центра симметрии.

7) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ ($pq > 0$) — эллиптический параболоид (рис. 9.12).

8) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ ($pq > 0$) — гиперболический параболоид (рис. 9.13).

9) $\frac{x^2}{a^2} = py$ — параболический цилиндр (рис. 9.18).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аргумент комплексного числа, 27
- Асимптоты
 алгебраической кривой, 117
 гиперболы, 117
- Базис
 в пространстве, 42
 на плоскости, 41
- Векторы
 коллинеарные, 34
 компланарные, 40
- Вершина
 гиперболы, 116
 конической поверхности, 137
 параболы, 120
 эллипса, 111
- Гипербола, 113
- Гиперболоид
 двуполостный, 144
 однополостный, 142
- Декартова система координат
 (д. с. к.)
 в пространстве, 18
 на плоскости, 6
- Декартовы координаты вектора, 42
- Деление отрезка в данном отношении
 в пространстве, 20
 на плоскости, 8
- Директриса параболы, 118
- Длина вектора, 34
 в координатах, 43
- Комплексное число, 21
- Комплексных чисел геометрическая интерпретация, 24
- Конус
 асимптотический, 149
 второго порядка, 148
- Координата точки на прямой, 5
- Координаты
 вектора, 41, 42
- Координаты точки
 декартовы
 в пространстве, 18
 на плоскости, 7
 полярные, 13
- Крамера формулы, 57
- Кривая второго порядка, 125
- Левая пара векторов на плоскости, 51
- Левая тройка векторов в пространстве, 52
- Меридианы поверхности вращения, 139
- Модуль
 вектора, 34
 комплексного числа, 25
- Муавра формула, 29
- Направляющая
 конической поверхности, 137
 цилиндрической поверхности, 135
- Направляющий вектор прямой
 в пространстве, 98
 на плоскости, 82
- Образующие цилиндрической поверхности, 135

Объем параллелепипеда, 69

Определитель

второго порядка, 54

третьего порядка, 58

Ориентация

плоскости, 50

пространства, 52

Оси эллипса, 112

Ось, 5

Ось вращения, 139

Ось гиперболы

действительная, 116

мнимая, 116

Парабола, 118

Параболоид

гиперболический, 147

эллиптический, 145

Параллели поверхности вращения,

139

Поверхность

вращения, 139

второго порядка, 150

коническая, 137

цилиндрическая, 135

Показательная функция ком-

плексного переменного,

31

Полуоси эллипса, 112

Полуось гиперболы

действительная, 116

мнимая, 116

Полус, 13

Полярные координаты, 13

Правая пара векторов на плоско-

сти, 51

Правая тройка векторов в про-

странстве, 52

Проекция вектора на ось, 47

Расстояние

между двумя прямыми в про-
странстве, 107

между двумя точками

в пространстве, 20

на плоскости, 8

от точки до плоскости, 97

от точки до прямой

в пространстве, 107

на плоскости, 87

Скалярное произведение,

выражение через координаты,

45

определение, 44

Смешанное произведение,

выражение через координаты,

68

геометрический смысл, 69

определение, 67

Соотношение параллелограмма,

47

Угол

между векторами, 44

между плоскостями, 95

между прямой и плоскостью,

102

между прямыми

в пространстве, 104

на плоскости, 81

Уравнение

гиперболы каноническое, 115

кривой

в неявной форме на плоско-
сти, 9

в полярных координатах, 16

параболы каноническое, 120

плоскости

общее, 91

по точке и нормали, 93

поверхности в неявной форме, эллипса, 113
89
Эллипс, 109
поверхности второго порядка, Эллипсоид, 141
150

прямой на плоскости
каноническое, 83
общее, 75
эллипса каноническое, 111

Уравнения

гиперболы фокальные, 118
кривой в пространстве
в неявной форме, 90
параметрические, 91
поверхностей второго порядка
канонические, 151–152
прямой в пространстве
канонические, 99
общие, 99
параметрические, 98
эллипса фокальные, 113

Фокальные радиусы

гиперболы, 113
эллипса, 109

Фокус параболы, 118

Фокусы

гиперболы, 113
эллипса, 109

Формулы преобразования координат

при параллельном переносе,
122
при повороте, 123

Цилиндрическая поверхность, 135

Цилиндры второго порядка, 149,
152

Эйлера формулы, 31

Эксцентриситет

гиперболы, 118

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Системы координат	5
1.1. Числовая ось	5
1.2. Декартовы координаты на плоскости	6
1.3. Уравнение кривой на плоскости в неявной форме	9
1.4. Параметрические уравнения кривой на плоскости	11
1.5. Полярные координаты на плоскости	13
1.6. Примеры классических кривых на плоскости	17
1.7. Декартовы координаты в пространстве	18
2. Комплексные числа	21
2.1. Понятие комплексного числа	21
2.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел	24
2.3. Тригонометрическая форма комплексного числа	27
2.4. Формула Муавра	29
2.5. Показательная форма комплексного числа	31
3. Векторы на плоскости и в пространстве.	
Скалярное произведение	33
3.1. Понятие вектора	33
3.2. Операции над векторами	35
3.3. Компланарные векторы	40
3.4. Базис и координаты вектора	41
3.5. Радиус-вектор точки	42
3.6. Угол между векторами. Скалярное произведение	44
3.7. Проекция вектора на ось	47
4. Векторное и смешанное произведения	50
4.1. Ориентации плоскости и пространства	50
4.2. Определители второго и третьего порядка	53
4.3. Векторное произведение	61
4.4. Смешанное произведение	67
5. Прямая на плоскости	75
5.1. Общее уравнение прямой на плоскости	75
5.2. Особенности расположения прямой относительно системы координат	76
5.3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом	77

5.4.	Взаимное расположение двух прямых на плоскости	78
5.5.	Каноническое уравнение прямой на плоскости	82
5.6.	Параметрические уравнения прямой на плоскости	83
5.7.	Уравнение прямой по двум точкам	84
5.8.	Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными с геометрической точки зрения	84
5.9.	Расстояние от точки до прямой на плоскости	86
6.	Плоскость и прямая в пространстве	89
6.1.	Уравнение поверхности и уравнения кривой в пространстве	89
6.2.	Общее уравнение плоскости в пространстве	91
6.3.	Особенности расположения плоскости относительно системы координат	93
6.4.	Взаимное расположение двух плоскостей	94
6.5.	Расстояние от точки до плоскости	96
6.6.	Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве	98
6.7.	Общие уравнения прямой в пространстве	99
6.8.	Взаимное расположение прямой и плоскости	100
6.9.	Взаимное расположение двух прямых в пространстве . . .	103
6.10.	Примеры решения задач	105
7.	Эллипс, гипербола и парабола	109
7.1.	Эллипс	109
7.2.	Гипербола	113
7.3.	Парабола	118
8.	Классификация кривых второго порядка	122
8.1.	Преобразования координат при параллельном переносе и повороте системы координат	122
8.2.	Классификация кривых второго порядка	125
8.3.	Примеры исследования кривых второго порядка	129
9.	Поверхности в пространстве	135
9.1.	Цилиндрические поверхности	135
9.2.	Конические поверхности	137
9.3.	Поверхности вращения	139
9.4.	Примеры поверхностей второго порядка	141
9.5.	Классификация поверхностей второго порядка	150
Предметный указатель		153
Оглавление		156

ФЕДОТОВ Андрей Георгиевич
КАРПОВ Борис Викторович

Аналитическая геометрия

Редактор Е. С. Резникова
Технический редактор О. Г. Завьялова

Изд. лиц. ИД 06117 от 23.10.2001. Подписано в печать 14.04.2005.
Формат 60х84/16. Бумага офсетная № 2. Ризография. Усл. печ. л. 9,8.
Уч.-изд. л. 8,9. Изд. № 26. Тираж 300 экз. Заказ – 103.

Московский государственный институт электроники и математики.
109028, Москва, Б. Трехсвятительский пер., 3/12.

Отдел оперативной полиграфии Московского государственного
института электроники и математики.

Москва, 113054, ул. М. Пионерская, 12.