Вопросы к экзамену по (линейной) алгебре.

3-й семестр, 2006/2007 уч. г., факультет ФПМ. Лектор: Б. В. Карпов.

1. Дать определение билинейной функции, записать билинейную функцию в координатах. Дать определение матрицы Грама; билинейной формы. Вывести закон преобразования матрицы Грама при переходе к другому базису.

2. Дать определение симметричной и кососимметричной билинейной функции. Доказать утверждение о разложении билинейной функции в сумму симметричной и кососимметричной билинейных функций. Дать определение квадратичной функции и доказать, что ей соответствует единственная симметричная билинейная функция.

3. Дать определение квадратичной формы, матрицы квадратичной формы, канонического и нормального вида квадратичной формы. Изложить метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Вывести следствия для полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

4. Дать определение ядра билинейной функции. Доказать соотношение между размерностью ядра, рангом матрицы Грама и размерностью пространства. Определить понятие ранга билинейной функции; невырожденной билинейной функции. Вывести условие невырожденности.

5. Изложить алгоритм ортогонализации Грама — Шмидта. Вывести теорему Якоби и критерий Сильвестра.

6. Доказать закон инерции квадратичных форм.

7. Дать определение евклидова пространства. Доказать неравенство Коши — Буняковского и теорему Пифагора.

8. Дать определение и доказать линейную независимость ортогональной и ортонормированной систем векторов. Обосновать существование ортогонального и ортонормированного базиса в любом подпространстве евклидова пространства.

9. Дать определение и доказать необходимое и достаточное условие ортогональности вектора и подпространства.

10. Дать определение проекции вектора на подпространство. Доказать существование, единственность и минимизирующее свойство проекции.

11. Изложить методы нахождения проекции вектора на подпространство и метод наименьших квадратов.

12. Дать определение сопряженного оператора. Доказать, что это определение не зависит от выбора ортонормированного базиса.

13. Дать определение ортогонального оператора. Сформулировать условия, характеризующие ортогональный оператор; доказать некоторые из них. Дать определение ортогональной матрицы, вывести необходимые и достаточные условия того, чтобы данная матрица была ортогональной. Сформулировать основную теорему об ортогональных операторах.

14. Дать определение группы, подгруппы; вывести простейшие свойства, привести примеры.

15. Определить левые смежные классы элементов группы по подгруппе. Доказать теорему Лагранжа. Определить индекс подгруппы, привести примеры.

16. Дать определение нормальной подгруппы. Дать определение фактор-группы, обосновать его корректность. Привести примеры.

17. Дать определение ядра и образа гомоморфизма групп. Доказать теорему о гомоморфизме; привести пример.

18. Дать определение и доказать свойства степеней и порядка элемента группы.

19. Дать определение циклической группы, привести примеры. Доказать теорему о строении циклических групп. Вывести следствие.

20. Доказать теорему о подгруппах циклической группы. Сформулировать утверждения об образующих конечной циклической группы и о гомоморфизмах циклических групп.

21. Дать определение прямого произведения (прямой суммы) групп. Доказать китайскую теорему об остатках. Вывести следствие.

22. Сформулировать теорему о строении примарных абелевых групп и теорему о строении конечных абелевых групп. Описать с точностью до изоморфизма все абелевы группы порядка 500.

23. Дать определение действия группы на множестве, орбиты и стабилизатора элемента множества. Привести пример. Доказать, что орбиты либо не пересекаются, либо совпадают.

24. Обосновать взаимно однозначное соответствие между точками орбиты и левыми смежными классами по стабилизатору. Вывести следствие. Вычислить в качестве примера порядок группы вращений куба (икосаэдра).

25. Доказать лемму Бернсайда и привести пример ее применения.

26. Дать определение кольца, вывести следствия из аксиом. Привести примеры колец.

27. Дать определение подкольца, идеала, главного идеала. Доказать, что всякий идеал кольца $\mathbb{Z}$ и кольца $K[x]$ является главным. Доказать, что в поле нет нетривиальных идеалов.

28. Дать определение фактор-кольца, доказать его корректность. Определить каноническое представление элемента фактор-кольца кольца многочленов.

29. Доказать критерий обратимости элемента кольца $\mathbb{Z}_n$ и кольца $K[x]/(f)$. Вывести необходимое и достаточное условие того, чтобы эти кольца были полями.

30. Дать определение гомоморфизма колец, ядра и образа гомоморфизма колец. Доказать, что ядро гомоморфизма колец — идеал, образ — подкольцо и прообраз идеала — идеал. Вывести следствие об идеалах кольца $\mathbb{Z}_n$.

31. Доказать теорему о гомоморфизме колец, привести пример.

32. Дать определение примитивного многочлена над $\mathbb{Z}$. Доказать первую и вторую леммы Гаусса. Дать определение прямого произведения (прямой суммы) групп.

33. Доказать редукционный признак неприводимости многочлена над $\mathbb{Z}$ и признак Эйзенштейна.

34. Дать определение расширения полей. Доказать, что всякое конечное расширение является алгебраическим. Привести пример.

35. Дать определение простого расширения полей. Доказать теорему о строении простого алгебраического расширения.

36. Доказать теорему о числе элементов конечного поля.

37. Доказать теорему о мультипликативной группе конечного поля.