

Список вопросов к экзамену.

1. Изложить понятие множества, дать определение подмножества, равенства множеств, пустого множества. Привести примеры множеств. Определить основные операции над множествами и сформулировать их свойства. Доказать одно из свойств ассоциативности или дистрибутивности и один из законов де Моргана.
2. Изложить понятие отображения и определить связанные с ним понятия: область определения, область значений, образ и прообраз элемента и подмножества. Дать определение инъективного, сюръективного, и биективного отображения. Сформулировать и доказать утверждение о существовании обратного отображения.
3. Дать определение декартова произведения множеств, декартовой степени данного множества, равномощных множеств. Привести примеры. Доказать, что множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству всех подмножеств натурального ряда.
4. Дать определение счетного множества. Сформулировать и доказать свойства счетных множеств, вывести следствия из них. Доказать, что множество конечных последовательностей натуральных чисел счетно.
5. Доказать, что множество бесконечных последовательностей нулей и единиц несчетно. Вывести следствие о несчетности множества всех подмножеств натурального ряда.
6. Сформулировать и доказать теорему Кантора — Бернштейна. Привести пример ее применения.
7. Доказать, что $[0, 1]$ равномощен множеству бесконечных последовательностей нулей и единиц. Доказать, что квадрат равномощен отрезку.

8. Доказать, что никакое множество не равномощно множеству своих подмножеств.
9. Дать определение высказывания и логической операции. Определить отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию и импликацию. Выразить импликацию через дизъюнкцию и отрицание.
10. Дать определение булевых функций, описать способы их задания. Сформулировать свойства булевых функций, доказать два из них.
11. Доказать теорему о совершенной дизъюнктивной нормальной форме. Привести пример.
12. Дать определение импликанта, простого импликанта, сокращенной и минимальной ДНФ данной булевой функции. Привести примеры.
13. Сформулировать и доказать теорему о представлении булевых функций полиномами Жегалкина. Привести пример.
14. Определить классы T_0 , T_1 , L , M , S . Сформулировать теорему Поста.
15. Описать язык, аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Привести пример вывода.
16. Сформулировать теорему об однозначности синтаксического разбора формулы и изложить идею ее доказательства.
17. Сформулировать критерий выводимости в исчислении высказываний. Доказать теорему о корректности исчисления высказываний.
18. Дать определение вывода из гипотез. Сформулировать и доказать теорему о дедукции.
19. Сформулировать и доказать следствия из аксиом исчисления высказываний.
20. Доказать теорему о полноте исчисления высказываний.

21. Объяснить, что такое алгоритм и функция, вычислимая в неформальном смысле. Описать устройство и команды машины с неограниченными регистрами. Привести пример программы.
22. Дать определение МНР-вычислимой функции. Привести примеры. Дать определение n -местной функции, вычисляемой по данной программе. Привести примеры. Определить основные функции, показать их вычислимость.
23. Программы стандартного вида. Конкатенация программ. Программа вида $P[l_1, \dots, l_n \rightarrow l]$.
24. Доказать теорему о вычислимости функции, получаемой в результате подстановки. Вывести следствия из нее.
25. Доказать теорему о вычислимости функции, получаемой примитивной рекурсией. Вывести следствия.
26. Ограниченная сумма, произведение, минимизация. Неограниченная минимизация. Утверждения о вычислимости. Следствия.
27. Другие подходы к вычислимости. Основной результат (формулировка). Частично рекурсивные функции: определение, совпадение с МНР-вычислимыми функциями.
28. Машины Тьюринга. Функции, вычисляемые на машинах Тьюринга. Тезис Черча.
29. Эффективно счетные множества. Эффективная счетность множеств $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{N}_+^3$ и множества конечных последовательностей натуральных чисел.
30. Нумерация команд и программ машины с неограниченными регистрами.
31. Нумерация вычислимых функций. Пример невычислимой функции.
32. Неразрешимые проблемы в теории вычислимости.