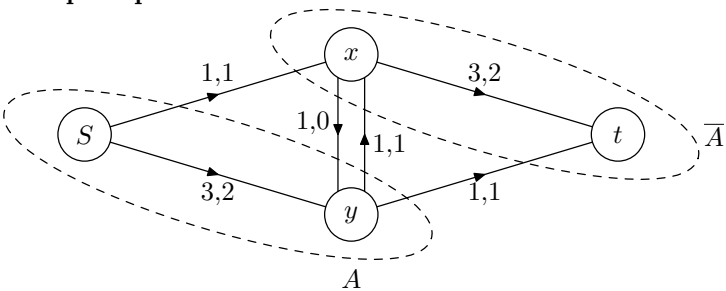
1 Основной результат о максимальном потоке в сети

Теорема (Форд, Фалкерсон). Для любой сети максимальная величина потока из s в t равна минимуму пропускных способностей разрезов.

Пример.



Первая метка здесь — пропускная способность, вторая — значение потока, $v = 1 + 2 = 3$.

Положим $A = \{s, y\}$. Тогда разрез состоит из ребер $\overrightarrow{sx}$, $\overrightarrow{yx}$, $\overrightarrow{yt}$, и его пропускная способность равна $1 + 1 + 1 = 3$, т. е. $c(A, \overline{A}) = 3$.

С другой стороны, из (1) следует, что для любого потока будет $v \leqslant c(A, \overline{A}) = 3$. Поэтому данный поток максимален, а разрез — минимален.

Доказательство теоремы. Ввиду (1) достаточно найти такие f и A, что $v = c(A, \overline{A})$. Тогда v будет максимальным, а A определит минимальный разрез. Возьмем за f какой-нибудь максимальный поток и построим A так, чтобы было $f(A, \overline{A}) = c(A, \overline{A})$, $f(\overline{A}, A) = 0$. Тогда по предыдущей теореме будем иметь $v = c(A, \overline{A})$, что и требуется. Такое множество вершин A строится с помощью следующей процедуры:

1) включим s в A;

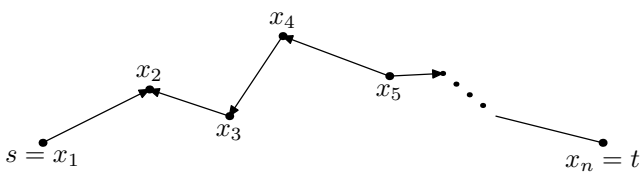
2) если $x \in A$ и $f(\overrightarrow{xy}) < c(\overrightarrow{xy})$, то $y \in A$;

3) если $x \in A$ и $f(\overrightarrow{yx}) > 0$, то $y \in A$.

Покажем, что A обладает требуемым свойством. Во-первых, A определяет разрез, т. е. $t \in \overline{A}$. Действительно, допустим, что это не так, и $t \in A$. Тогда имеется последовательность вершин из A

$$s = x_1, x_2, \ldots, x_n = t,$$

являющимися вершинами такого пути



что если ребро с вершинами x_i, $x_i + 1$ имеет ориентацию $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$, то $f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) < c(\overrightarrow{x_i x_{i+1}})$, а если ориентацию $\overrightarrow{x_{i+1} x_i}$, то $f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) > 0$.

Рассмотрим

$$\varepsilon_1 = \min_{\left(\substack{\text{по всем} \\ \overrightarrow{x_i x_{i+1}}}\right)} (c - f)(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}), \quad \varepsilon_2 = \min_{\left(\substack{\text{по всем} \\ \overrightarrow{x_{i+1} x_i}}\right)} f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}),$$

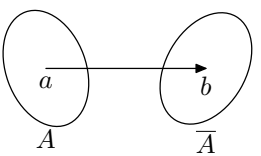
$$\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0.$$

Изменим f следующим образом: на каждом ребре $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ заменим $f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}})$ на $f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \varepsilon$; а на каждом ребре $\overrightarrow{x_{i+1} x_i}$ заменим $f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i})$ на $f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) - \varepsilon$.

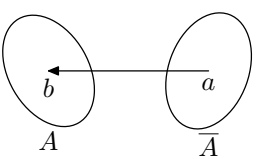
Задача. Проверить, что новая функция f является потоком величины $v + \varepsilon$.

Это противоречит максимальности f. Итак, $t \in \overline{A}$.

Теперь, если имеется ребро $\overrightarrow{ab}$, где $a \in A$, $b \in \overline{A}$,



то по определению $f(\overrightarrow{ab}) = c(\overrightarrow{ab})$. Если же имеется ребро $\overrightarrow{ab}$, где $a \in \overline{A}$, $b \in A$,



то по определению $f(\overrightarrow{ab}) = 0$. Поэтому $f(A, \overline{A}) = c(A, \overline{A})$ и $f(\overline{A}, A) = 0$. Теорема доказана.