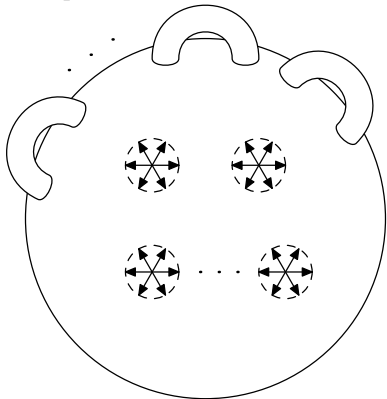


Совершенно так же показывается, что если имеется поверхность вида



(g ручек и $p \geq 1$ дисков вида ) , то это — поверхность N_{p+2g} .

Допустим теперь, что задана поверхность G и Γ — граф, уложенный на G без самопересечений. Тогда можно говорить о числах: B (число вершин G), P (число ребер G) и Γ (число граней G , т. е. число кусков, на которые рассыпается поверхность G , если ее разрезать по всем ребрам). Вообще говоря, $B - P + \Gamma$ зависит от графа.

Теорема.

Если ограничиться рассмотрением только таких связных графов, у которых каждая грань является топологическим многоугольником, то число $B - P + \Gamma$ не зависит от графа.

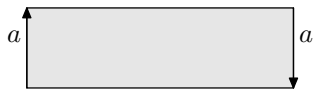
Указанное число называется *эйлеровой характеристикой* поверхности G и обозначается $\chi(G)$. Теорема верна не только для поверхностей вида S_g или N_p , но для поверхностей, являющихся областями на S_g или N_p (с границей).

Задача.

Докажите, что $\chi(S_g) = 2 - 2g$, а $\chi(N_p) = 2 - p$.

Задача.

Найти $\chi(G)$, где G — круг, кольцо, лист Мёбиуса.

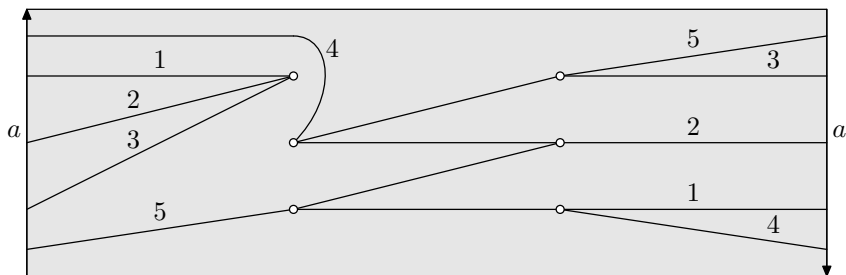


Замечание: С помощью этих задач можно решать предыдущие задачи об определении типа поверхности: нужно (1) проверить ориентированность — неориентированность, (2) найти эйлерову характеристику. (Все задачи решаются явным построением какого-либо графа, у которого все грани — топологические многоугольники, и затем подсчетом $B - P + \Gamma$).

Задача.

Доказать, что граф $K_{3,3}$ можно расположить без самопересечений на листе Мёбиуса.

Решение.



Теорема.

Для любого связного графа на поверхности G (границ которого уже не обязаны быть топологическими многоугольниками!) всегда выполнено неравенство

$$B - P + \Gamma \geq \chi(G).$$

Задача.

Доказать, что граф $K_{4,4}$ нельзя уложить без самопересечений на проективную плоскость N_1 .

Решение.

У графа $K_{4,4}$ число вершин равно 8, а число ребер равно $4 \cdot 4 = 16$. Кроме того, каждый цикл $K_{4,4}$ имеет ≥ 4 ребра (это видно непосредственно). Поэтому, если бы $K_{4,4}$ укладывался на N_1 , то граница каждой грани была бы не менее, чем с 4 ребрами, а потому $4G \leq 2P$ (сопоставляя каждой грани ограничивающие ее ребра, мы подсчитаем каждое ребро 2 раза, т. к. граничный цикл ограничивает ровно две грани). Далее (см. задачу выше) $\chi(N_1) = 2 - 1 = 1$. Применим теорему: $1 = \chi(N_1) \leq B - P + G \leq B - P + \frac{1}{2}P = B - \frac{1}{2}P = 8 - \frac{1}{2}16 = 0$. Противоречие.