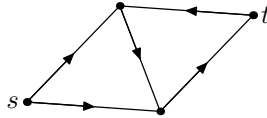


Потоки в сетях.

Сеть — ориентированный граф без петель с двумя помеченными вершинами: s (источник) и t (сток).

Рёбро $a \rightarrow b$ обозначается так: $\vec{ab}$.

Пример:



Неотрицательная числовая функция c на рёбрах называется *пропускной способностью* сети. Ее задают, надписывая значения на рёбрах.

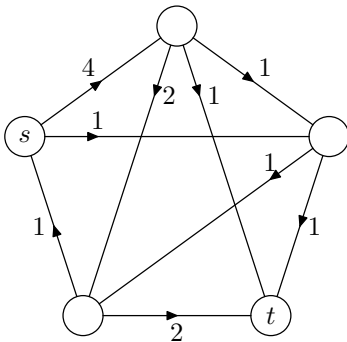
Поток f величины v — это неотрицательная числовая функция на рёбрах сети, удовлетворяющая условиям:

- (1) $f(\vec{ab}) \leq c(\vec{ab})$ для любого ребра $\vec{ab}$
- (2) для любой вершины x

$$\sum_{\text{outgoing from } x} f(\vec{xy}) - \sum_{\text{incoming to } x} f(\vec{yx}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq t, s; \\ v, & \text{если } x = s; \\ -v, & \text{если } x = t. \end{cases}$$

Здесь первая сумма берется по всем рёбрам вида $\vec{xy}$, а вторая — по всем рёбрам вида $\vec{yx}$; первая сумма показывает, сколько «вытекает» из x , вторая — сколько «втекает» в x .

Пример:

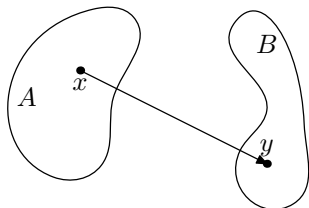


Пропускные способности здесь предполагаются любыми, не меньшими значений потока.

Общая цель этой науки — найти поток максимальной величины.

Введем обозначения. Пусть A и B — два подмножества в множестве вершин и g — какая-либо числовая функция на рёбрах сети. Положим

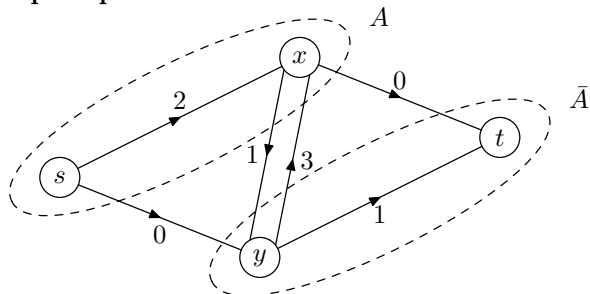
$$g(A, B) = \sum_{\substack{x \in A \\ y \in B}} g(\vec{xy})$$



Если A — какое-либо множество вершин, то $\bar{A}$ обозначает его *дополнение*, т. е. множество всех вершин, не входящих в A .

Пусть A — какое-либо множество вершин, содержащее источник s и не содержащее сток t . Совокупность всех ребер, ведущих из A в $\bar{A}$ (т. е. с началом в A и концом в $\bar{A}$) называется *разрезом* сети. Число $c(A, \bar{A})$ в этом случае называется *пропускной способностью разреза*.

Пример.



$\{\vec{sy}, \vec{xy}, \vec{xt}\}$ — разрез.

Его пропускная способность равна $0 + 1 + 0 = 1$.

Задача. Доказать, что любая цепь из s в t (содержит по крайней мере одно ребро разреза.

Задача. Выбросим все ребра какого-нибудь разреза. Какова величина максимального потока в сети? (Ответ: 0.)

Теорема. Пусть f — поток величины v . Если A — какое-либо множество вершин, содержащее s и не содержащее t , то

$$v = f(A, \bar{A}) - f(\bar{A}, A) \leq c(A, \bar{A}) \quad (1)$$

($f(A, \bar{A})$ — сколько «протекает» через разрез; $f(\bar{A}, A)$ — сколько «вытекает» через разрез.)

Доказательство. Пусть V — множество всех вершин. Т.к. f — поток, то, по определению,

$$f(\vec{xy}) - f(\vec{yx}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq t, s; \\ v, & \text{если } x = s; \\ -v, & \text{если } x = t. \end{cases}$$

Сложим те из этих равенств, для которых $x \in A$. Поскольку $s \in A$, получим:

$$v = \sum_{x \in A} (f(x, V) - f(V, x)) = f(A, V) - f(V, A).$$