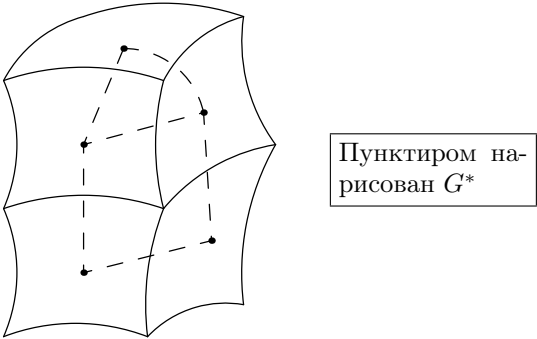


Пусть S — некоторая поверхность и G — граф без самопересечений на S . *Правильной* раскраской граней этого графа G называется такая их раскраска, что любые две грани, имеющие общее ребро, окрашены в *разные* цвета. Пусть G^* — дуальный к G граф (вершины G^* — это грани G , а две вершины G^* соединяются ребром, если соответствующие им грани G имеют общее ребро). Ясно, что правильная раскраска граней G — это то же самое, что правильная раскраска вершин G^* (т.е. вершины, соединенные ребром, должны быть окрашены по-разному).



Хроматическое число поверхности S (обозначение: $\text{col}(S)$) — это *наименьшее* возможное число красок, достаточное для правильной раскраски граней *любого* графа, уложенного без самопересечений на S . Хроматическое число графа Γ (обозначение $\text{col}(\Gamma)$) — это *наименьшее* число красок, с помощью которых можно правильно раскрасить вершины Γ .

Теорема. Для любой замкнутой топологической поверхности S без края (т.е. поверхности типа S_g или N_p), кроме бутылки Клейна,

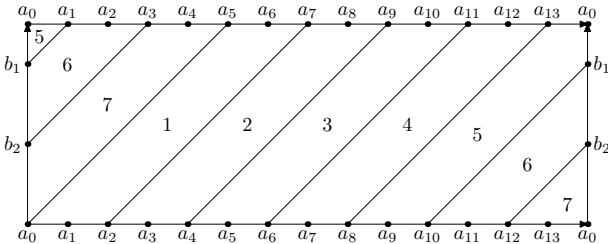
$$\text{col}(S) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24 \cdot \chi(S)}}{2} \right\rceil,$$

где $[a]$ — целая часть числа a , а для бутылки Клейна N_2 $\text{col}(N_2) = 6$ (а не 7, как дает указанная формула).

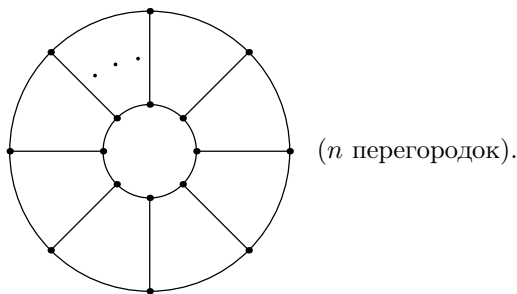
Задача. По указанной теореме для тора $S = S_1$ имеем $\text{col}(S_1) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24 \cdot 0}}{2} \right\rceil = 7$. Это значит, что на торе имеется граф, грани которого нельзя правильно покрасить менее, чем 7 цветами. Построить его явно.

Решение.

В этом графе 7 граней и каждая граничит с каждой!



Задача. Каким наименьшим числом красок можно раскрасить следующий граф на плоскости (его можно рассматривать и как граф на сфере)?



Задача. Найти $\text{col}(\text{graph})$.

Задача. Найти $\text{col}(K_{m,n})$ (тут $K_{m,n}$ — это граф).

Задача. Найти $\text{col}(K_n)$.

Задача. Пусть на поверхности S нарисован (без самопересечений) граф G . Доказать, что $\text{col}(S) \geq \text{col}(G)$. Вывести отсюда, что для любой поверхности можно указать граф, не укладывающийся (без самопересечений) на эту поверхность.

Решение. Рассмотрим граф G^* ; он тоже уложен на S без самопересечений (см. картинку выше). Из определения следует, что грани G^* можно правильно раскрасить $\text{col}(G)$ цветами. Значит, $\text{col}(S) \geq \text{col}(G)$ (т.к. априори не исключено существование такого графа, грани которого правильно раскрасить $\text{col}(G)$ цветами нельзя).

Что касается второй части задачи, то (ввиду первой ее части) достаточно указать граф X , у которого $\text{col}(X)$ больше любого наперед заданного числа n ($= \text{col}(S)$). За X можно взять K_{n+1} (т.к. $\text{col}(K_{n+1}) = n + 1$).