Вопросы к экзамену по линейной алгебре.

2-й семестр 2005/2006 уч. г., факультет ФПМ. Лектор: Б. В. Карпов.

1. Дать определение множества комплексных чисел, вещественных чисел. Доказать, что сложение и умножение вещественных и комплексных чисел согласованы. Дать определение мнимой единицы, чисто мнимых чисел и алгебраической формы комплексного числа.
2. Сформулировать свойства сложения и умножения комплексных чисел. Доказать, что всякое ненулевое комплексное число обладает обратным.
3. Изложить геометрическую интерпретацию комплексных чисел. Дать определение модуля, аргумента и тригонометрической формы комплексного числа. Вывести условие равенства комплексных чисел в тригонометрической форме.
4. Вывести формулу для произведения комплексных чисел в тригонометрической форме. Изложить геометрический смысл умножения комплексных чисел.
5. Доказать формулу Муавра. Определить показательную функцию чисто мнимого аргумента и показательную форму комплексного числа. Вывести формулы Эйлера.
6. Дать определение корня n-й степени из комплексного числа. Вывести формулы для нахождения корней.
7. Дать определение поля, вывести следствия из аксиом. Привести примеры полей.
8. Дать определение многочлена, степени многочлена, равенства многочленов, суммы и произведения многочленов. Доказать утверждения о степени суммы и произведения многочленов. Доказать необходимое и достаточное условие существования обратного многочлена по умножению.
9. Доказать теорему о делении многочленов с остатком. Вывести теорему Безу.
10. Дать определение функции, задаваемой многочленом, корня многочлена. Доказать теорему о равенстве многочленов над бесконечным полем и теоремы об оценке числа корней многочлена.
11. Доказать формулу Тейлора для многочленов с вещественными коэффициентами и утверждение о связи кратности корня с обращением в нуль производных.
12. Сформулировать основную теорему алгебры комплексных чисел. Вывести следствия о разложении на множители многочленов с комплексными и вещественными коэффициентами.
13. Дать определение ассоциированных многочленов. Определить наибольший общий делитель двух многочленов, изложить алгоритм Евклида. Доказать, что НОД(f, g) представляется в виде $uf + vg$ и что он определен однозначно с точностью до ассоциированности.
14. Определить поле рациональных дробей над полем K. Доказать, что любая рациональная дробь представима единственным образом в виде суммы многочлена и правильной дроби.
15. Дать определение и доказать свойства взаимно простых многочленов. Дать определение приводимого и неприводимого многочлена. Изложить теорему о разложении многочлена на неприводимые множители (без доказательства единственности).
16. Дать определение простейшей дроби, привести примеры. Доказать теорему о возможности разложения правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.
17. Дать определение матрицы над полем K. Определить сложение матриц, умножение матрицы на элемент поля и изложить свойства этих операций.
18. Дать определение и сформулировать свойства умножения матриц. Доказать одно из свойств дистрибутивности.
19. Дать определение и сформулировать свойства умножения матриц. Доказать свойство ассоциативности.
20. Дать определение и сформулировать свойства умножения матриц. Доказать совместимость умножения матриц с умножением матрицы на элемент поля и утверждение о связи умножения матриц с транспонированием.
21. Дать определение системы линейных уравнений, решения системы, матрицы и расширенной матрицы системы, столбца свободных членов. Дать определение равносильных систем линейных уравнений, привести примеры. Обосновать матричную запись системы линейных уравнений.
22. Дать определение элементарных преобразований строк, элементарных матриц. Объяснить обратимость элементарных преобразований. Доказать теорему о связи элементарных преобразований строк с умножением на элементарные матрицы.
23. Дать определение ступенчатой и главной ступенчатой матрицы, привести примеры. Доказать, теорему о возможности приведения матрицы к ступенчатому и к главному ступенчатому виду.

24. Определить и обосновать отношение эквивалентности на множестве матриц данного размера. Сформулировать теорему о двух (главных) ступенчатых матрицах, полученных из данной матрицы элементарными преобразованиями строк. Сформулировать следствие о классах эквивалентности матриц.

25. Доказать теорему о равносильности систем с эквивалентными расширенными матрицами.

26. Изложить классификацию систем линейных уравнений, привести примеры. Доказать теорему о системе ступенчатого вида.

27. Изложить метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Объяснить смысл записи общего решения системы в виде выражения главных неизвестных через свободные, а также в параметрической и в векторной формах.

28. Дать определение однородной системы линейных уравнений. Доказать достаточное условие существования нетривиального решения однородной системы и теорему о связи общего решения неоднородной и соответствующей однородной системы.

29. Дать определение перестановки из n элементов, тривиальной перестановки, инверсии, четности и знака перестановки. Дать определение транспозиции и доказать теорему об изменении четности перестановки при транспозиции.

30. Дать определение определителя n-го порядка и сформулировать его свойства. Доказать, что при транспонировании матрицы определитель не изменяется.

31. Дать определение определителя n-го порядка и сформулировать его свойства. Доказать свойства линейности определителя по любой строке.

32. Дать определение определителя n-го порядка и сформулировать его свойства. Доказать свойство кососимметричности определителя по строкам.

33. Дать определение определителя n-го порядка и сформулировать его свойства. Доказать утверждение об определителе треугольной матрицы. Вывести следствия из свойств определителя (утверждения об определителе единичной матрицы, об определителе с нулевой строкой, с одинаковыми или пропорциональными строками; поведение при элементарных преобразованиях III-го типа).

34. Дать определение определителя n-го порядка. Дать определение функции, полилинейной и кососимметричной по строкам. Доказать теорему о связи такой функции с определителем. Доказать аналогичное утверждение для столбцов. Вывести следствие об однозначном задании определителя указанными выше свойствами и значением на единичной матрице.

35. Дать определение определителя n-го порядка. Дать определение функции, полилинейной и кососимметричной по строкам. Сформулировать теорему о связи такой функции с определителем. Доказать теорему об определителе с углом нулей.

36. Дать определение определителя n-го порядка. Дать определение функции, полилинейной и кососимметричной по строкам. Сформулировать теорему о связи такой функции с определителем. Доказать теорему об определителе произведения матриц.

37. Доказать теорему о разложении определителя по строке. Дать определение дополнительного минора и алгебраического дополнения. Сформулировать теорему о разложении определителя по столбцу.

38. Дать определение дополнительного минора и алгебраического дополнения. Доказать теоремы о разложении по чужой строке и по чужому столбцу.

39. Дать определение обратной матрицы, доказать её единственность. Изложить два способа нахождения обратной матрицы (без доказательств). Доказать, что если для квадратных матриц A и B выполнено $AB = E$, то эти матрицы взаимно обратны.

40. Дать определение и доказать основное свойство присоединенной матрицы. Доказать необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы и вывести формулы для её элементов.

41. Доказать теорему о главном ступенчатом виде квадратной матрицы A и о связи с умножением на A^{-1}. Обосновать нахождение обратной матрицы методом Гаусса.

42. Правило Крамера. Определитель Вандермонда.

43. Дать определение линейного пространства, привести примеры.

44. Дать определение линейно независимой и линейно зависимой систем векторов. Доказать свойства линейно линейно независимых и линейно зависимых систем.

45. Доказать лемму о линейной зависимости.

46. Дать определение линейного подпространства. Доказать, что множество решений однородной системы является подпространством. Определить линейную оболочку множества векторов и доказать, что она является наименьшим подпространством, содержащим данное множество.

47. Дать определение линейной оболочки данного множества векторов; конечномерного и бесконечномерного пространства. Доказать утверждение, характеризующее бесконечномерные пространства в терминах линейно независимых систем.

48. Дать определение базиса множества векторов, координат вектора в базисе. Доказать утверждение о связи базиса множества с базисом линейной оболочки и теорему о существовании базиса.

49. Доказать теорему о числе базисных векторов данного множества. Дать определение ранга множества и размерности подпространства. Привести примеры. Найти базис множества столбцов главной ступенчатой матрицы.

50. Дать определение базиса множества векторов, координат вектора в базисе. Дать определение ранга множества и размерности подпространства. Изложить способ нахождения базиса подпространства решений однородной системы.

51. Доказать, что n линейно независимых векторов n-мерного пространства образуют в этом пространстве базис. Применить это утверждение к решению линейных рекуррентных соотношений 2-го порядка.

52. Доказать теорему о сохранении линейных соотношений между столбцами матрицы при элементарных преобразованиях ее строк. Изложить решение задачи о нахождении базиса конечного множества столбцов.

53. Доказать, что переход от одной матрицы к другой конечным числом элементарных преобразований является отношением эквивалентности на множестве матриц данного размера. Доказать теорему о единственности главной ступенчатой матрицы, эквивалентной данной матрице.

54. Дать определение ранга матрицы, изложить способ его нахождения. Доказать утверждение о ранге ступенчатой матрицы.

55. Доказать теорему о ранге матрицы и теорему о ранге произведения матриц.

56. Дать определение суммы подпространств. Доказать теорему о размерности суммы подпространств.

57. Дать определение матрицы перехода от одного базиса к другому, доказать ее невырожденность. Вывести формулу преобразования координат вектора при переходе к новому базису.

58. Дать определение линейного отображения, ядра и образа линейного отображения. Доказать свойства ядра и образа. Доказать теорему о задании линейного отображения конечномерного пространства образами базисных векторов.

59. Дать определение и доказать свойства изоморфизма линейных пространств. Доказать необходимое и достаточное условие изоморфности конечномерных пространств.

60. Дать определение линейного оператора, матрицы линейного оператора в данном базисе. Доказать, что любая квадратная матрица, порядок которой равен числу векторов базиса, является матрицей единственного линейного оператора в данном базисе. Обосновать способ нахождения матрицы оператора, заданного на пространстве K^n.

61. Дать определение матрицы линейного оператора в данном базисе. Доказать формулу для нахождения координат образа вектора при действии линейного оператора и формулу, связывающую матрицы оператора в разных базисах.

62. Дать определение матрицы линейного оператора в данном базисе. Доказать утверждение о матрице композиции линейных операторов. Дать определение и доказать критерий обратимости линейного оператора.

63. Дать определение собственного вектора и собственного значения линейного оператора. Изложить и обосновать метод нахождения собственных векторов и собственных значений.

64. Дать определение инвариантного подпространства относительно линейного оператора, ограничения оператора на инвариантное подпространство. Дать определение собственного подпространства. Привести примеры.

65. Дать определение характеристического многочлена линейного оператора. Доказать, что характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. Доказать, что характеристический многочлен ограничения оператора на инвариантное подпространство делит характеристический многочлен самого оператора. Вывести следствие о размерности собственного подпространства.

66. Доказать теорему о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Дать определение и вывести достаточное условие диагонализируемости

линейного оператора.
67. Дать определение и доказать критерий диагонализируемости линейного оператора.
68. Дать определение жордановой клетки, жордановой матрицы. Сформулировать теорему о приведении к жордановой нормальной форме и вывести следствие для поля $\mathbb{C}$.
69. Вычислить степени жордановой клетки и их ранги. Вывести формулу для числа жордановых клеток порядка p для данного линейного оператора.
70. Вычислить значение многочлена от жордановой клетки. Дать определение функции от матрицы. Вычислить значение e^{Jt} для жордановой клетки J.